

RAPPORT DE STAGE – 3 ANNÉE ÉCOLE CENTRALE
MÉDITERRANÉE / MASTER 2 – AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

Analyse du développement d'un jet turbulent à masse volumique variable

Étudiant :
CHIKHI Abdelilah

Encadrantes :
AMIELH Muriel
PIETRI Laurence

Année académique : 2024–2025

Nomenclature

Dans ce document, nous utilisons les notations suivantes pour représenter les différentes grandeurs physiques intervenant dans l'étude des écoulements fluides.

D	Diamètre
ρ	Masse volumique
U	Vitesse longitudinale
V	Vitesse radiale
ν, μ	Viscosité cinématique/dynamique
g	Accélération gravitationnelle
x	coordonnée axial
r	coordonnée radial
u	Composante de vitesse axiale
v	Composante de Vitesse radiale
c	Concentration
n	indice de réfraction
λ	longueur d'onde
j	Désigne le jet
eq	Terme équivalant
m	Valeur maximale
a	Air ambient
a_{ij}	Le tenseur d'anisotropie
$Nd : YAG$	Yttrium Aluminium Garnet dopé au Néodyme
$TNTI$	Turbulent/Non-Turbulent Interface
JFM	Journal of Fluid Mechanics
$IRPHE$	Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre

Table des matières

1	Introduction générale	4
2	Présentation de l'IRPHÉ	6
3	Paramètres fondamentaux des jets turbulents	7
3.1	Description et hypothèses de travail	7
3.2	Forces gouvernant la dynamique du jet	7
3.3	Paramètres adimensionnés	7
3.4	Régions de développement du jet	8
3.5	Notion de diamètre équivalent	9
3.6	Condition d'expérience retenu	9
4	Mesures couplées de vitesse et de concentration : principes et usages de la PIV–PLIF	10
4.1	La vélocimétrie par image de particules (PIV)	10
4.2	La fluorescence induite par laser (LIF)	11
4.3	Couplage des techniques PIV et PLIF pour caractériser les écoulements d'air et d'hélium	11
5	Étude du modèle de turbulence de Kelwaramani et al [13]	13
5.1	Notions fondamentales du modèle analytique :	13
5.1.1	Auto-similarité	13
5.1.2	Champs des vitesses	14
5.2	Les tensions de Reynolds	14
5.2.1	Tension tangentielle :	15
5.2.2	Tension normale	15
5.3	La dissipation d'énergie cinétique sur l'axe du jet	17
5.4	Sources de données et valeurs de référence	18
6	Analyse de l'anisotropie turbulente : diagramme de lumley	19
7	Application du modèle de Kelwaramni et analyse par le diagramme de Lumley à partir des données expérimentales de Moutte	21
7.1	Estimation de la dissipation de l'énergie cinétique sur l'axe du jet	21
7.2	Jets air/hélium comparés par le diagramme de Lumley	23
7.2.1	Hélium	23
7.2.2	Interprétation et conclusion	25
7.2.3	Air	26
7.2.4	Interprétation et conclusion	28
7.3	Diagramme de Lumley à partir des lois de similitude	28
8	Optimisation du système PLIF	29
8.1	Positionnement du problème	29
8.2	Méthodologie et solution proposée	32
8.3	Résultats et discussion	34
8.4	Optimisation finale	36
8.4.1	Présentation de la méthode de dichotomie	36
8.4.2	Application numérique	37

9 conclusion générale	38
10 Annexe	41
10.1 Élaboration du diagramme de Lumley selon les lois de similitude — implémentation en Python	41
10.2 Diagramme de Lumley du jet d'air (zones 1, 2, 3, 4, 7 et 8) normalisé en x/D	42
10.3 Démarche théorique de correction chromatique	43
10.4 Code MATLAB — Calcul de la profondeur et de l'épaisseur du jet à l'aide de la loi de Sellmeier	43
10.5 la méthode de dichotomie pour l'optimisation de notre système	45
10.6 Démonstration de la conservation du mquantité de mouvement	47
10.6.1 Conservation du moment axial	47
10.6.2 Conséquence de la conservation du moment	48

1 Introduction générale

L'étude des écoulements turbulents représente depuis plusieurs décennies un défi majeur en mécanique des fluides, tant par sa complexité intrinsèque que par son importance dans de nombreuses applications industrielles et environnementales. La turbulence, phénomène fondamental dans ce domaine, se manifeste par un mouvement chaotique, tridimensionnel, instationnaire et fortement dissipatif. Contrairement aux écoulements laminaires aux trajectoires ordonnées, les écoulements turbulents sont marqués par une agitation désordonnée sur une large gamme d'échelles spatiales et temporelles. Ce comportement illustre la notion de système complexe : bien que régis localement par des équations déterministes, les écoulements turbulents sont globalement imprévisibles, en raison de l'interaction non linéaire entre les structures du fluide. Présente dans une grande diversité de phénomènes naturels et industriels, la turbulence est responsable du transport de quantité de mouvement, de chaleur et de masse.

Parmi les écoulements turbulents, les jets fluides occupent une place essentielle. Un jet turbulent correspond à un fluide injecté à grande vitesse dans un autre fluide environnant, générant un mélange intense sous l'effet de la turbulence. Ces jets interviennent dans des applications aussi variées que les flammes turbulentes, les systèmes de refroidissement, les processus de combustion, ou encore dans les milieux naturels comme les estuaires.



FIGURE 1 – à droite, une flamme turbulente et à gauche, un estuaire.

Leur dynamique est d'autant plus complexe lorsque des variations de densité sont présentes, qu'elles soient dues à la température, la salinité ou la composition. Comprendre ces mécanismes est donc crucial pour optimiser le mélange, améliorer les procédés industriels, et décrypter certains phénomènes environnementaux.

À l'intérieur d'un jet turbulent, une interface particulière joue un rôle central : la TNTI (Turbulent/Non-Turbulent Interface).

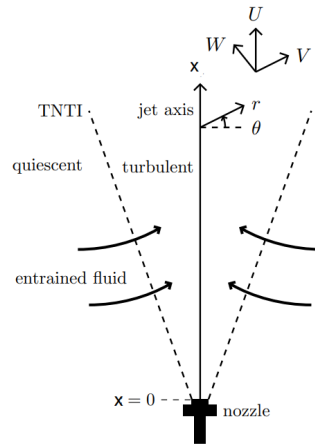


FIGURE 2 – Schematic of an axisymmetric turbulent jet with entrained ambient fluid and turbulent/non-turbulent interface (TNTI).[2]

C'est à travers cette frontière dynamique que le fluide ambiant, initialement immobile, est aspiré puis incorporé dans la zone turbulente du jet, sous l'effet des basses pressions générées par la vitesse d'injection (principe de Bernoulli). Ce phénomène, appelé entraînement, contribue activement à l'évolution du jet et au mélange efficace entre fluide injecté et fluide environnant. Les particules au sein du jet peuvent donc provenir soit de la buse d'injection, soit de l'environnement extérieur, un point crucial à prendre en compte dans les mesures optiques.

Depuis les premières observations, la compréhension de ces phénomènes a largement bénéficié de l'évolution des méthodes expérimentales. Des expériences fondatrices comme celle du ruban coloré de Reynolds ont permis de révéler la transition vers la turbulence. Aujourd'hui, les progrès technologiques offrent des outils bien plus précis et non-intrusifs. En particulier, les méthodes optiques telles que la vélocimétrie par images de particules (PIV) et la fluorescence induite par laser (PLIF) permettent de visualiser et de quantifier les champs de vitesse et de concentration sans perturber l'écoulement.

C'est dans ce cadre que s'inscrit ce projet de fin d'études, réalisé au sein du laboratoire IRPHE. Son objectif est de caractériser le développement de jets turbulents d'air ou d'hélium à partir d'une base de données issue de mesures couplées PIV/PLIF effectuées par Moutte en 2018. L'étude vise à mieux comprendre les propriétés turbulentes de ces jets et à évaluer la possibilité d'appliquer le modèle proposé par Kelwaramni, initialement développé pour des jets à masse volumique constante, à des configurations où la masse volumique varie. Ce modèle décrit l'évolution auto-similaire des jets en termes de vitesses moyennes, de tenseurs de Reynolds et de dissipation.

Une partie importante de ce travail sera également consacrée à l'analyse de l'anisotropie de la turbulence à l'aide du diagramme de Lumley, outil essentiel pour visualiser la déviation par rapport à l'isotropie dans les écoulements.

Enfin, une contribution technique sera apportée à l'optimisation du système optique PLIF, notamment à travers une modélisation optique du faisceau laser (via la loi de Sellmeier) et recherche numérique d'une distance focale optimale à l'aide de la méthode de la bisection, afin d'améliorer le rapport signal sur bruit des mesures de PLIF.

2 Présentation de l'IRPHÉ

L'Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre (**IRPHÉ**) est une **Unité Mixte de Recherche (UMR 7342)** placée sous la tutelle conjointe du CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique), d'Aix-Marseille Université (AMU) et de Centrale Méditerranée

Sa mission principale est la *modélisation de systèmes macroscopiques complexes*, en s'appuyant sur des approches expérimentales, théoriques et numériques, afin d'approfondir la compréhension de phénomènes variés, souvent à l'interface entre sciences fondamentales et applications technologiques.

Axes de recherche

L'institut développe ses travaux autour de plusieurs thématiques :

- **Écoulements industriels** : sillages, turbomachines, aéroacoustique, instabilités fluides-structure, etc.
- **Matériaux et procédés industriels** : jets réactifs, combustion, solidification, fragmentation, etc.
- **Milieux naturels, environnement et univers** : vagues, tsunamis, transferts air-mer, instabilités astrophysiques, etc.
- **Milieux vivants et systèmes biologiques** : mécanique respiratoire, systèmes cardiovasculaires, ingénierie tissulaire, etc.

Durant cette période de stage, mon projet s'inscrit dans le premier axe, à savoir les écoulements industriels.

3 Paramètres fondamentaux des jets turbulents

Après avoir présenté les notions générales liées à la turbulence et replacé notre problématique dans le cadre des systèmes complexes, nous pouvons désormais préciser le cadre de notre étude à l'aide d'un ensemble d'hypothèses simplificatrices, ainsi qu'une brève description du système étudié. Ces hypothèses permettent de poser des bases claires pour l'analyse et la modélisation du jet considéré.

3.1 Description et hypothèses de travail

Le présent travail s'appuie sur les résultats expérimentaux défendus par Moutte [15], dans le cadre d'une thèse. Il porte sur l'étude d'un jet de tube rond de diamètre D_j , injecté verticalement dans un environnement d'air immobile. Le fluide injecté, air ou hélium, se propage vers le haut et développe un comportement turbulent dont l'analyse est menée dans différentes régions de développement. Afin de mieux comprendre les mécanismes physiques à l'œuvre dans cet écoulement, nous définissons les hypothèses de travail, identifions les principales forces mises en jeu, précisons les paramètres adimensionnés pertinents et décrivons la structuration spatiale du jet.

Les hypothèses adoptées dans ce cadre sont les suivantes :

- Jet *axisymétrique*, *vertical*, *subsonique* et *incompressible* ;
- Fluide injecté : hélium (He) ou air, se propageant dans un air ambiant initialement immobile ;
- Propriétés thermophysiques constantes : ρ , μ , ν (densité, viscosité dynamique, viscosité cinématique) ;
- Effets de paroi, instabilités acoustiques et compressibilité négligés.

3.2 Forces gouvernant la dynamique du jet

La dynamique d'un jet est gouvernée par un équilibre entre différentes familles de forces, qui varient selon la position dans le champ d'écoulement et les propriétés physiques du fluide. Trois forces principales sont identifiées dans notre étude :

- **Inertie** : $\rho_j U_j^2$, force dominante à l'instant de l'éjection, responsable de la pénétration du jet dans le fluide ambiant ;
- **Viscosité** : $\mu_j U_j / D_j^2$, qui agit sur la diffusion du jet et la dissipation de l'énergie turbulente ;
- **Gravité / Flottabilité** : $|\rho_j - \rho_a| g$, force due à la différence de densité entre le fluide injecté et le fluide ambiant.

Le rapport entre ces forces permet de déterminer la structure du jet ainsi que les transitions entre différentes zones de développement.

3.3 Paramètres adimensionnés

Pour mieux caractériser le comportement du jet et comparer différentes configurations, il est nécessaire d'introduire des grandeurs adimensionnelles. Celles-ci permettent de dégager les lois de similitude et d'identifier les régimes d'écoulement. Deux nombres sans dimension sont principalement utilisés ici :

- **Nombre de Reynolds** :

$$\text{Re} = \frac{U_j D_j}{\nu_j}$$

Ce nombre exprime le rapport entre les effets d'inertie et de viscosité. Un jet est considéré comme turbulent pour $\text{Re} \gg 1$.

— **Nombre de Froude :**

$$\text{Fr} = \frac{\rho_j U_j^2}{(\rho_a - \rho_j) g D_j}$$

Ce paramètre compare l'influence de l'inertie à celle de la flottabilité. Un grand nombre de Froude signifie un jet dominé par l'inertie.

Ces paramètres constituent des outils essentiels pour interpréter les résultats expérimentaux et guider les modélisations théoriques.

3.4 Régions de développement du jet

La structure d'un jet turbulent évolue spatialement : elle comporte plusieurs zones successives aux propriétés bien distinctes. Ces régions sont définies en fonction des gradients de vitesse, de turbulence et de concentration. , comme illustré à la Figure 3.

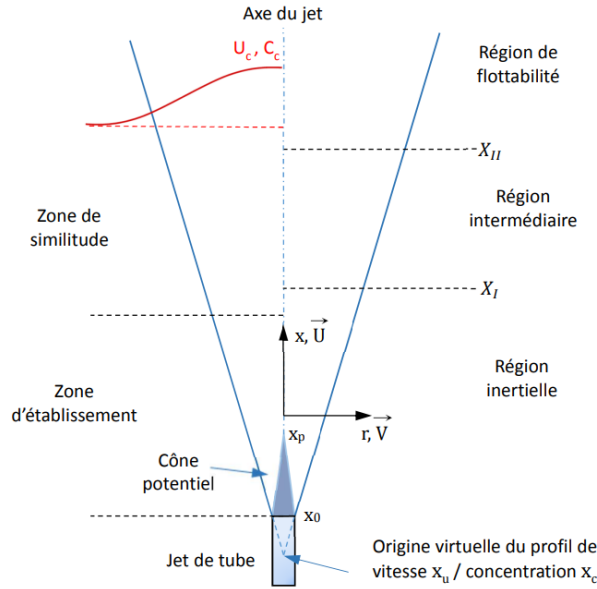


FIGURE 3 – Structure typique d'un jet turbulent

On distingue les étapes suivantes :

- **Zone d'établissement** : située juste après l'orifice, elle contient le *cône potentiel*, où la vitesse reste proche de celle de sortie U_j . La turbulence y est encore peu développée.
- **Zone de similitude** : au-delà du cône potentiel, les profils de vitesse et de concentration deviennent auto-similaires. Pour un jet à masse volumique variable cette région se divise en :
 - *Région inertielle* : la turbulence commence à se structurer, l'entraînement du fluide ambiant s'intensifie ;
 - *Région intermédiaire* (x_I) : l'interaction avec le fluide environnant devient significative, augmentant fortement le mélange ;
 - *Région de flottabilité* (à partir de x_{II}) : les effets de densité commencent à modifier la trajectoire du jet, notamment pour l'hélium.

Ces différentes zones permettent de structurer l'analyse expérimentale et de localiser les mesures pertinentes dans le champ.

3.5 Notion de diamètre équivalent

Dans le cas de jets composés de fluides de densités différentes, la comparaison directe des grandeurs physiques peut être trompeuse. Pour contourner ce problème, Thring et Newby (1952) [15] introduit la notion de *diamètre équivalent*, notée D_{eq} , définie par :

$$D_{eq} = D_j \sqrt{\frac{\rho_j}{\rho_a}}$$

Cette transformation permet de conserver un flux de quantité de mouvement identique à celui d'un jet de densité ambiante, facilitant la comparaison des profils de vitesse et de concentration.

3.6 Condition d'expérience retenu

Le tableau suivant présente les paramètres caractéristiques ainsi que les valeurs associées pour les deux fluides étudiés (air et hélium). Ces valeurs sont extraites de la thèse de Moutte et ont pour objectif d'être utilisées ultérieurement, notamment pour leur intégration dans les équations de Kelwaramni (2024). :

Nom des essais	Gaz utilisé	U_j (m.s ⁻¹)	ν_j (m ² .s ⁻¹)	R_v (ν_j/ν_{air})	ρ_j (kg.m ⁻³)	S (ρ_j/ρ_{air})	Re_j	Fr_j	Taux d'acétone (%)
Essai 1	Hélium	80	$3,96 \times 10^{-5}$	2,54	0,47	0,39	7000	120000	13,9
Essai 2	Air	53	$1,13 \times 10^{-5}$	0,73	1,40	1,17	16400	571000	18,2

TABLE 1 – Caractéristiques des essais retenus (Essai 1 et Essai 2).[15]

L'essai 1, réalisé avec de l'hélium, permet d'étudier le développement d'un jet plus léger que l'air ambiant ($S = 0.39$), tandis que l'essai 2 documente le cas d'un jet plus lourd que l'air ambiant ($S = 1.17$). Pour les deux essais (1 et 2), le diamètre du jet est $D_j = 3.5$ mm.

4 Mesures couplées de vitesse et de concentration : principes et usages de la PIV–PLIF

Le diagnostic optique en mécanique des fluides regroupe un ensemble de méthodes expérimentales modernes et non intrusives, exploitant les propriétés de la lumière pour mesurer, sans contact, des grandeurs telles que la vitesse, la température ou la concentration d'un fluide, avec une grande précision spatiale et temporelle.

Les données que je vais utiliser par la suite proviennent d'un couplage de deux techniques optiques classiques en mécanique des fluides : la vélocimétrie par images de particules (PIV) et la fluorescence induite par laser (PLIF), réalisé par Moutte [15], comme je l'ai déjà mentionné dans l'introduction générale.

Dans les deux sous-paragrophes suivants, je présenterai en détail le principe et l'application de ces deux techniques.

4.1 La vélocimétrie par image de particules (PIV)

La vélocimétrie par image de particules (PIV) est une méthode optique non intrusive qui, par corrélation de deux images de particules traceuses, fournit un champ de vitesses mesuré en points fixes de l'espace ; de nature *eulérienne*, elle permet d'extraire à la fois les valeurs instantanées de la vitesse et leurs fluctuations.

Pour obtenir un champ à la fois dense et fiable, chaque image est découpée en fenêtres d'interrogation de taille typique 32×32 px qui se chevauchent à 50 % (soit un décalage de 16 px). Ce chevauchement génère un vecteur de vitesse tous les 16 px sans diminuer la qualité statistique de la corrélation. Les vecteurs dont le pic de corrélation est trop faible sont automatiquement détectés puis supprimés, et les « trous » ainsi créés sont comblés par interpolation à partir des vecteurs voisins valables. Cette stratégie assure un compromis optimal entre finesse spatiale et robustesse des mesures.

Pour couvrir l'ensemble des 100 mm de hauteur du jet (jusqu'à la zone auto-similaire), le champ d'observation de 22×22 mm² ($\sim 6D_j \times D_j$) est déplacés par des tables 3D motorisées avec 20 % de recouvrement (4 mm). Huit acquisitions de 4 000 paires d'images suffisent à balayer toute la zone (le champ n° 5 ayant été délaissé pour optimiser le temps, la mémoire et les consommables). Un système de mire permet de contrôler et corriger précisément l'alignement avant et après chaque déplacement, garantissant une reconstruction continue et fiable du champ de vitesses.

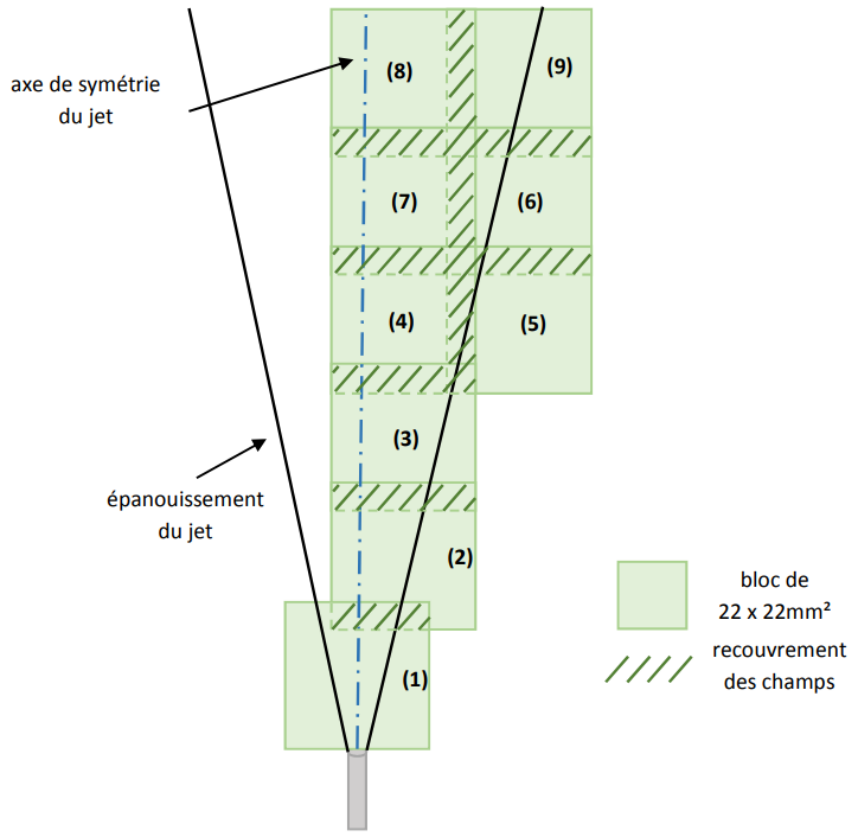


FIGURE 4 – Schéma représentant le protocole d'acquisition des données.[15]

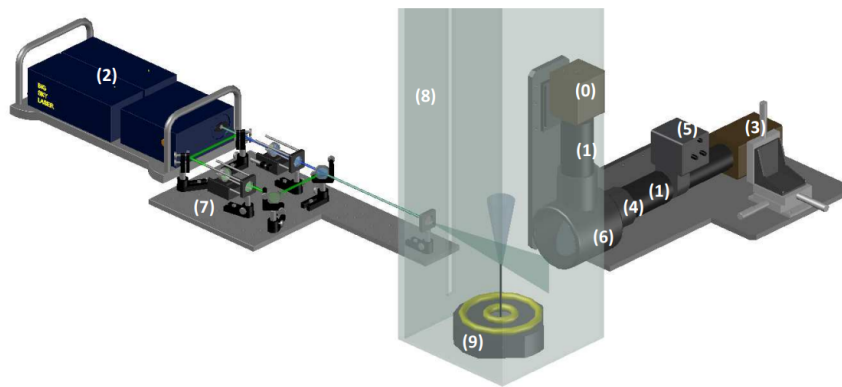
4.2 La fluorescence induite par laser (LIF)

La Fluorescence induite par plan laser (PLIF) est une technique non intrusive de mesure planaire de concentration : le jet est ensemencé avec un traceur fluorescent (ici de l'acétone) excité par une nappe laser UV ($\lambda = 266 \text{ nm}$). La caméra enregistre l'émission de fluorescence ($350 - 550 \text{ nm}$), donnant un champ d'intensité $S(x, y)$. Par application des relations de proportionnalité entre signal et concentration, ce signal peut ensuite être converti en fraction molaire puis en fraction massique, fournissant ainsi une carte 2D quantitative du traceur.

4.3 Couplage des techniques PIV et PLIF pour caractériser les écoulements d'air et d'hélium

La figure 5, extraite de la thèse de Moutte, illustre le couplage PIV–PLIF. Dans cette configuration, le laser Nd :YAG délivre deux faisceaux (un ultraviolet à 266 nm et un vert à 532 nm). Comme indiqué sur le schéma de la figure 5, et à l'aide de miroirs dichroïques, ces deux faisceaux sont séparés. Il est ensuite possible de modifier la forme de chaque faisceau : par exemple, Moutte a fait passer chacun d'eux à travers un système optique comprenant des lentilles divergentes, convergentes et cylindriques, afin de façonner le profil lumineux.

Les deux faisceaux sont ensuite recombinés à l'aide d'un autre miroir dichroïque, ce qui permet d'obtenir un plan d'illumination au niveau du jet.



(0) caméra PIV	(1) objectif 200mm
(2) laser pulsé	(3) caméra PLIF
(4) filtre passe-bas 532nm	(5) intensificateur de lumière
(6) miroir dichroïque	(7) table optique
(8) enceinte de confinement	(9) enceinte inoxydable et jet

FIGURE 5 – Banc expérimental utilisé pour le couplage des mesures PIV-PLIF.[15]

Nous consacrerons le dernier chapitre aux pistes d'optimisation du couplage optique pour améliorer la fiabilité des diagnostics PLIF.

5 Étude du modèle de turbulence de Kelwaramani et al [13]

Le modèle analytique de Kewalramani et al. [13] est un modèle récent 2024 visant à décrire le profil radial de la dissipation de l'énergie cinétique turbulente dans un jet rond. Il a été élaboré pour un écoulement incompressible à masse volumique constante, issu d'une buse circulaire dans un fluide ambiant au repos. Contrairement aux approches classiques basées sur l'auto-similarité complète des grandeurs turbulentes, ce modèle suppose uniquement l'auto-similarité du profil de vitesse axiale moyenne, considéré de forme gaussienne à partir d'une certaine distance en aval. Il s'appuie sur une relation de viscosité turbulente non linéaire, dérivée d'un modèle algébrique simplifié de contraintes turbulentes, permettant de mieux représenter la dynamique réelle du jet.

Dans notre expérience, le jet étudié est à masse volumique variable, notamment dans le cas de l'hélium. Une question essentielle est donc de déterminer dans quelle mesure ce modèle, conçu pour une masse volumique constante, reste applicable. Pour cela, une première étape consiste à évaluer la variation spatiale de la masse volumique dans notre domaine, à partir des mesures de fraction massique obtenues par PLIF. Les résultats montrent que, pour le jet d'hélium, la masse volumique varie fortement entre $0 < x/D_j < 5$, puis tend à se stabiliser au-delà de $x/D_j \approx 10$, suggérant que le modèle théorique pourrait décrire correctement la dynamique turbulente dans cette zone. En revanche, pour l'air, la masse volumique varie très peu, même à la sortie de la buse, et devient pratiquement constante au-delà de $x/D_j > 5$, ce qui laisse penser que le modèle analytique devrait s'appliquer avec une bonne précision.

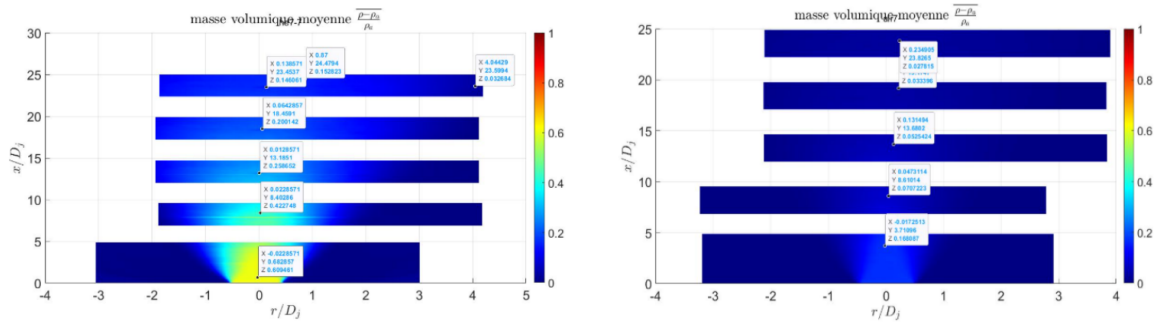


FIGURE 6 – Variation de la masse volumique dans le domaine - Gauche : dans le jet d'Helium, Droite : dans le jet d'air.[3]

5.1 Notions fondamentales du modèle analytique :

Comme dans tout problème en physique, l'une des premières étapes consiste à définir un cadre d'analyse clair en identifiant les concepts fondamentaux et en posant les hypothèses de travail. C'est dans cette logique que s'inscrit cette section, en présentant les notions essentielles qui sous-tendent le développement du modèle analytique.

5.1.1 Auto-similarité

L'auto-similarité est une notion fondamentale dans l'étude des jets turbulents. Elle se manifeste d'abord de manière intuitive et naturelle, comme on peut l'observer dans la nature ou à travers des expériences. Ensuite, c'est aussi un concept modélisable mathématiquement, ce qui permet d'introduire des simplifications dans l'analyse. Plus précisément, cette notion signifie que, lorsqu'un champ

est normalisé, il conserve une forme invariante tout au long de son développement, malgré l'évolution spatiale et l'intensité de la turbulence. Il garde la forme suivante :

$$u(x, t) = U_m(x) f\left(\frac{r}{L_u(x)}\right) \quad (1)$$

où $U_m(x)$ représente la valeur maximale sur l'axe du jet, qui diminue avec la distance x depuis la sortie. L_u représente la longueur caractéristique des jets turbulents.

5.1.2 Champs des vitesses

À partir de l'hypothèse de similarité, on peut proposer un profil de vitesse moyen sous la forme suivante :

$$\bar{u} = u_c \exp(-\eta^2), \quad (2)$$

où $\bar{u}$ est la vitesse moyenne, u_c est la vitesse maximale sur l'axe du jet, et η est une variables spatiale normalisée.

La question qui se pose alors naturellement est : pourquoi choisir une fonction exponentielle pour décrire le profil ? La réponse réside dans l'analogie physique avec un processus de diffusion. En effet, la turbulence dans le jet agit de manière similaire à un mécanisme diffusif, transportant et étalant la quantité de mouvement du centre vers les bords. Ce processus conduit naturellement à un profil de type gaussien — une courbe en cloche — où la vitesse est maximale sur l'axe central du jet et décroît progressivement vers l'extérieur. Ce choix est donc à la fois cohérent avec les observations expérimentales et justifié par la physique sous-jacente du phénomène [14].

En utilisant l'équation de continuité suivante :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{v})}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

Kewalramani et al écrivent la vitesse radiale de la manière suivante :

$$\bar{v} = -\frac{1}{r} \int_0^r r' \exp(-\eta^2) \left[\frac{du_c}{dx} + u_c \frac{2r'}{L_u^3} \frac{dL_u}{dx} \right] dr'. \quad (4)$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\bar{v} = u_c \sqrt{\ln(2)} \cdot \frac{dL_u}{dx} \left[\frac{\exp(-\eta^2) - 1}{\eta} \left(\frac{L_u}{2u_c} \cdot \frac{du_c}{dL_u} \right) + \eta \exp(-\eta^2) \right]. \quad (5)$$

En posant $\chi = \frac{u_c}{L_u} \cdot \frac{dL_u}{du_c}$, on constate que la vitesse radiale est influencée par cette grandeur. Par conséquent, l'interprétation et la simplification de cette expression peuvent entraîner des modifications significatives.

5.2 Les tensions de Reynolds

Nous allons à présent travailler sur les tensions de Reynolds en nous appuyant sur la décomposition classique de Reynolds, qui permet de séparer chaque grandeur en une partie moyenne et une partie fluctuante.

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i$$

où $\bar{u}_i$ représente la composante moyenne et u'_i la composante fluctuante de la vitesse.

Les composantes du tenseur des tensions de Reynolds sont alors définies par :

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$$

avec ρ la masse volumique du fluide.

Le tenseur des tensions de Reynolds s'écrit explicitement sous la forme matricielle :

$$\boldsymbol{\tau} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix}$$

5.2.1 Tension tangentielle :

Grâce au modèle de longueur de mélange proposé par Prandtl [18] et à l'hypothèse de Boussinesq [4], on peut modéliser les contraintes de Reynolds par une viscosité turbulente ϑ_t effective, ce qui permet de relier les tensions de Reynolds aux gradients moyens de vitesse, on obtient :

$$\overline{u'v'} = -\vartheta_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}, \quad (6)$$

où ϑ_t est la viscosité turbulente. Pour le modèle de longueur de mélange, on utilise une analogie afin de trouver un exemple adapté. On suppose que la longueur de mélange est proportionnelle à la largeur du jet, soit :

$$l_m(r) = \alpha L_u \quad (7)$$

où α est une constante et L_u , qui représente la longueur caractéristique de l'écoulement.

On parle d'analogie ici, car cette forme du modèle a été initialement développée pour une couche limite sur une plaque plane (Crimaldi et Koseff, 2006).

Ainsi, la viscosité turbulente s'exprime comme :

$$\vartheta_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right|. \quad (8)$$

En remplaçant l_m par son expression, on obtient :

$$\overline{u'v'} = -\alpha^2 L_u^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}. \quad (9)$$

En posant $\alpha = C_{uv}$ et en remplaçant $\bar{u}$ par son expression, on trouve :

$$\overline{u'v'} = -C_{uv} L_u^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = 4u_c^2 C_{uv} \eta |\eta| \exp(-2\eta^2), \quad (10)$$

où u_c est la vitesse maximale sur l'axe du jet et η est la variable normalisée.

5.2.2 Tension normale

Pour déterminer les contraintes turbulentes homogènes, il est idéal d'utiliser un modèle unifié pour les tensions normales et tangentielles. Cependant, des expériences ont révélé que le modèle simplifié précédent ne donne pas de résultats satisfaisants dans ce contexte. Par conséquent, Kewlramani et al. (2024) ont adopté le modèle plus robuste proposé par Gatski et Speziale [10], qui repose sur trois hypothèses fondamentales : l'équilibre faible (*weak equilibrium*), la relation pression-déformation (*pressure-strain relation*), et le théorème de Cayley-Hamilton.

Ce modèle utilise le tenseur d'anisotropie, défini comme le tenseur des contraintes de Reynolds normalisé :

$$a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}, \quad (11)$$

où k est l'énergie cinétique turbulente et δ_{ij} est le tenseur identité. Le tenseur a_{ij} est exprimé en fonction des invariants des tenseurs de taux de déformation S_{ij} et de rotation Ω_{ij} de l'écoulement moyen, c'est-à-dire :

$$a_{ij} = f(S_{ij}, \Omega_{ij}, k, \epsilon), \quad (12)$$

où ϵ est le taux de dissipation de l'énergie turbulente. Pour déterminer l'expression de la fonction f , le théorème de Cayley-Hamilton est appliqué.

— Simplification des tenseurs

Pour simplifier les calculs, on introduit les notations suivantes [16] :

$$\begin{aligned} s^2 &= s_{ik} s_{kj}, & \{s^2\} &= s_{ik} s_{kt}, \\ sw &= s_{ij} w_{kj}, & swsw &= s_{ik} w_{kl} s_{lm} w_{mj}, \\ I &= \delta_{ij}, \end{aligned}$$

où s_{ij} et w_{ij} représentent respectivement les composantes des tenseurs de taux de déformation et de rotation. Selon Pope (1975), le tenseur d'anisotropie a_{ij} peut être exprimé sous la forme d'un polynôme tensoriel infini :

$$a = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{\alpha_i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta_j=0}^{\infty} G_{\beta_1, \beta_2, \dots}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots} s^{\alpha_1} W^{\beta_1} s^{\alpha_2} W^{\beta_2} \dots \quad (13)$$

où les coefficients G sont des fonctions des invariants des tenseurs S et W . Grâce au théorème de Cayley-Hamilton, il est possible de réduire ce polynôme infini à une combinaison finie de tenseurs, limitant ainsi les invariants nécessaires.

— Cas bidimensionnel

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, Pope (1975) montre qu'il existe trois tenseurs linéairement indépendants et deux invariants. Les tenseurs sont définis comme suit :

$$T^0 = \frac{1}{3} I_3 - \frac{1}{2} I_2, \quad T^1 = S, \quad T^2 = sw - ws,$$

et les invariants sont :

$$\{s^2\}, \quad \{w^2\}.$$

Ainsi, l'expression de a devient :

$$a = \sum_{\lambda=0}^2 G^{\lambda} T^{\lambda}. \quad (14)$$

En revenant aux contraintes de Reynolds non normalisées, l'expression générale, compatible avec les hypothèses de viscosité effective, est :

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} + k \sum_{\lambda=0}^2 G^{\lambda} T^{\lambda}. \quad (15)$$

— Détermination des coefficients G

Pour déterminer les coefficients G , on utilise un modèle algébrique simplifié proposé par Rodi (1972). Ce modèle exprime a sous la forme :

$$a = -g [b_1 S + b_2 (aS + Sa - 2I_2\{aS\}) - b_3 (aw - wa)], \quad (16)$$

avec les coefficients :

$$b_1 = \frac{8}{15}, \quad b_2 = \frac{1}{11}(5 - 9c_2), \quad b_3 = \frac{1}{11}(7c_2 + 1), \quad g = \left(c_1 + \frac{P}{\epsilon} - 1\right)^{-1}.$$

Une forme équivalente est donnée par :

$$a = -2C_\mu \left[S + gb_3(Sw - aS) + gb_2\{S^2\} \left(\frac{2}{3}I_3 - I_2 \right) \right], \quad (17)$$

où :

$$C_\mu = \frac{1}{2}b_1g \left(1 - 2\{w^2\}b_3^2g^2 - \frac{2}{3}b_2^2g^2\{S^2\} \right)^{-1}. \quad (18)$$

En comparant les termes, les coefficients G sont :

$$G^0 = 4C_\mu gb\{S^2\}, \quad G^1 = -2C_\mu, \quad G^2 = -2C_\mu gb_3. \quad (19)$$

L'expression finale des contraintes de Reynolds devient :

$$\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3}k\delta_{ij} = -C_1 \frac{k}{\epsilon} S_{ij} - C_2 \frac{k^2}{\epsilon^2} (S_{ij} w_{kj} + S_{ij} w_{ki}) + C_3 \frac{k^2}{\epsilon^2} \left(S_{ij} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right). \quad (20)$$

— Expressions des tensions normales

En appliquant ce modèle, les tensions normales s'expriment comme suit :

$$\overline{u'u'} = u_c^2 \exp(-2\eta^2) \left[4C_{2u}\eta^2 + C_{1u} \left(\frac{1}{\chi} \frac{dL_u}{dx} \right)^2 \left((1 - 2\chi\eta^2 + 3\chi) + (1 + 2\chi) \frac{1 - \exp(-\eta^2)}{2\eta^2 \exp(-\eta^2)} \right)^2 \right], \quad (21)$$

$$\overline{v'v'} = u_c^2 \exp(-2\eta^2) \left[4C_{2v}\eta^2 + C_{1v} \left(\frac{1}{\chi} \frac{dL_u}{dx} \right)^2 \left((1 - 2\chi\eta^2 + 3\chi) + (1 + 2\chi) \frac{1 - \exp(-\eta^2)}{2\eta^2 \exp(-\eta^2)} \right)^2 \right], \quad (22)$$

5.3 La dissipation d'énergie cinétique sur l'axe du jet

Les travaux de Burattini et al. (2005), Darisse et al. (2015), ainsi que de Breda & Buxton (2018), ont permis de proposer une expression de l'énergie cinétique turbulente k , définie par :

$$k = \frac{\overline{u'u'} + 2\overline{v'v'}}{2},$$

où $\overline{v'v'}$ et $\overline{u'u'}$ sont les variances des composantes de vitesse. En partant de cette définition de k et de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente, exprimée sous la forme :

$$\overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i'^2 u'_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{u'_i p'} \right) + \nu \nabla^2(k) - \bar{\epsilon}, \quad (23)$$

et sous certaines hypothèses détaillées en annexe, on obtient une expression analytique de la dissipation de l'énergie cinétique turbulente au centre de l'écoulement, donnée par :

$$\frac{\bar{\varepsilon}_c L_u}{U_c^3} = - \left(\frac{dL_u}{dy} \frac{(1 + 3\chi)}{\chi} \right)^2 \left[\frac{3(C_{1v} + C_{1u})}{2\chi} \frac{dL_u}{dy} + 2C_{1k} L_u \left(\frac{\frac{d^2 L_u}{dy^2}}{\frac{dL_u}{dy}} - \frac{\frac{d\chi}{dy}}{(3\chi + 1)\chi} \right) \right]. \quad (24)$$

Cette relation permet de quantifier la dissipation de l'énergie cinétique turbulente au centre de l'écoulement en fonction des paramètres géométriques et des gradients de vitesse. Elle met en évidence l'influence de la variation de la largeur caractéristique L_u , ainsi que celle des coefficients de production et de dissipation dans l'évolution de la turbulence. L'analyse de cette dissipation est essentielle pour mieux comprendre l'efficacité de la turbulence dans les configurations étudiées.

5.4 Sources de données et valeurs de référence

Coefficients du modèle

Les tensions de Reynolds contiennent les coefficients C_{1u} , C_{2u} , C_{1v} , C_{2v} et C_{uv} . Pour chacun de ces coefficients, trois valeurs sont rapportées. La première est extraite de l'article de Kelwaramani et al.. Il existe également des valeurs expérimentales pour l'hélium et l'air, que nous avons estimées dans le cadre d'un projet d'ECM mené en collaboration avec l'IRPHE, par moi-même et deux collègues [3]. Les détails de notre méthode d'estimation figurent dans [3]. Le tableau suivant présente les trois valeurs correspondantes pour chaque coefficient.

Coefficient	JFM	Hé	Air
C_{1u}	0.85	1.42	1.06
C_{2u}	0.09	0.07	0.06
C_{1v}	0.54	0.89	0.67
C_{2v}	0.043	0.04	0.03
C_{uv}	0.03	0.02	0.02

TABLE 2 – Valeurs des coefficients des tensions de Reynolds issues [3] et [13].

Valeur de χ

Tout d'abord, rappelons la définition de χ :

$$\chi = \frac{u_c}{L_u} \cdot \frac{dL_u}{du_c}$$

En ce qui concerne cette valeur, une estimation a également été proposée. L'article de Wygnanski et Fiedler [22] indique que $\frac{dL_u}{dx} \approx 0,1$.

Par ailleurs, deux relations de proportionnalité classiques pour u_c et L_u peuvent être établies sous certaines hypothèses simplificatrices :

- La quantité de mouvement M est conservé le long de l'axe du jet (voir annexe pour plus de détails) ;
- le jet évolue dans une région d'auto-similarité ;

- l'élargissement du jet est dominé par une diffusion turbulente, entraînant un taux d'élargissement constant ;
- le jet est libre et incompressible — « libre » signifie qu'il n'y a ni paroi ni obstacle devant le jet, autrement dit, aucune force externe, comme une pression imposée, ne modifie la dynamique du jet ;
- le fluide ambiant est au repos ou sa vitesse est négligeable.

Sous ces hypothèses, on peut montrer que $u_x \propto \frac{1}{x}$ et que $L_u \propto x$.

Alors à partir de ces 3 résultats que

$$\chi = -1$$

6 Analyse de l'anisotropie turbulente : diagramme de lumley

En mettant en balance les états isotropes et anisotropes du champ turbulent, le diagramme de Lumley offre une vision synthétique indispensable pour l'optimisation des performances des systèmes d'écoulement.

Justification théorique et démarche scientifique du diagramme de Lumley

Le diagramme de Lumley repose sur l'analyse des deux invariants du tenseur d'anisotropie a_{ij} , dérivé des tensions de Reynolds (voir section 2.2.2). Comme l'a indiqué Lumley [21], ce tenseur permet de calculer les deux invariants suivants :

$$\text{II} = -\frac{1}{2} \text{tr}(a^2) \quad \text{et} \quad \text{III} = \det(a)$$

On rappelle que tr représente la trace du tenseur et $\det$ son déterminant.

Ces deux invariants permettent de représenter graphiquement l'état d'anisotropie de la turbulence à l'aide du *diagramme de Lumley*, souvent utilisé pour visualiser le degré et le type d'anisotropie dans un écoulement turbulent.

Dans notre cas, le jet rond axisymétrique étudié satisfait les conditions nécessaires à l'application de ce diagramme. En effet, bien que la moyenne de la composante azimutale soit nulle ($\langle w' \rangle = 0$) par symétrie (moments impairs nuls), les trois composantes de l'énergie turbulente sont non nulles :

$$\langle u'_x u'_x \rangle \neq 0, \quad \langle u'_r u'_r \rangle \neq 0, \quad \langle u'_z u'_z \rangle \neq 0.$$

Panchapakesan et Lumley (1993) ont d'ailleurs montré que $\langle u'_r u'_r \rangle \approx \langle u'_z u'_z \rangle$, confirmant ainsi le caractère pleinement tridimensionnel de la turbulence.

Pour positionner les points expérimentaux sur le diagramme, on exploite les champs instantanés mesurés $U = u(x, r, t)$ et $V = v(x, r, t)$, et on estime la composante azimutale w' par symétrie, en supposant $w'^2 \approx v'^2$. Les fluctuations u' et v' sont obtenues en soustrayant la moyenne temporelle locale, puis les composantes du tenseur de Reynolds $R_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$ sont calculées. La symétrie axisymétrique permet d'imposer $\langle u'w' \rangle = \langle v'w' \rangle = 0$. L'ensemble de ces hypothèses et approximations garantit la validité de l'application du diagramme de Lumley à notre configuration, et permet une analyse quantitative de l'anisotropie locale de la turbulence.

On peut interpréter les différentes zones du diagramme de Lumley de la manière suivante :

- **Régime axisymétrique extensible (Axisymmetric 'rode-like')** : deux valeurs propres du tenseur d'anisotropie sont égales et faibles, tandis que la troisième, généralement la composante axiale, est dominante. Ce type de structure turbulente est souvent qualifié de *turbulence en forme de cigare*.

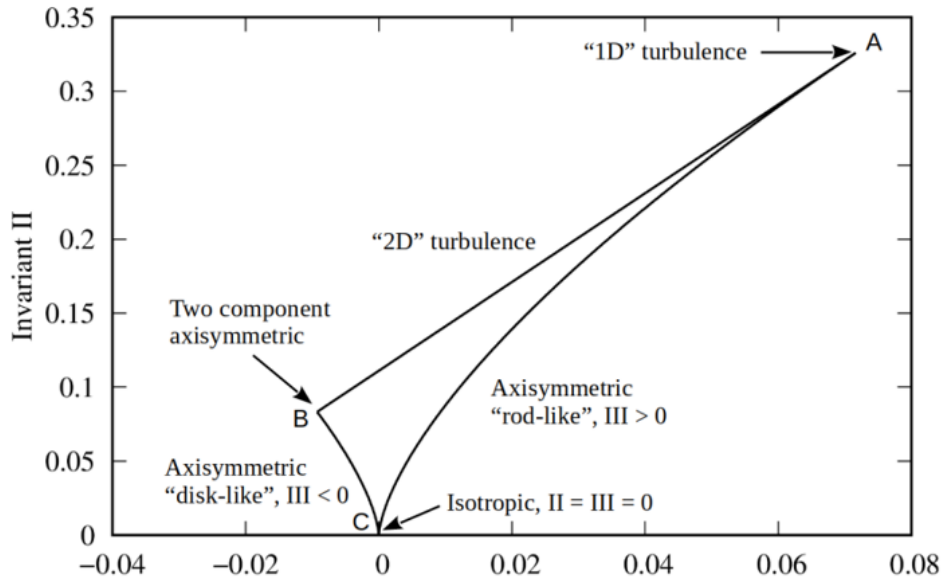


FIGURE 7 – Triangle de Lumley : différents archétypes de la turbulence sur la carte de l'invariant du tenseur d'anisotropie de la turbulence.[20]

- **Régime axisymétrique contractant (Axisymmetric 'Disk-like')** : deux composantes (dans le plan perpendiculaire à l'axe) sont dominantes, tandis que la troisième est plus faible. La turbulence prend alors une *forme de disque*.
- **Point d'isotropie** (0, 0) : ce point central du diagramme correspond à une turbulence parfaitement isotrope, où les trois composantes ont la même intensité.
- **Limite bicomposante (ou bidimensionnelle)** : les trois valeurs propres du tenseur d'anisotropie sont nulles, correspondant à un régime limite [5].

En définitive, l'introduction du diagramme de Lumley dans cette étude n'est pas un simple choix de représentation, mais une nécessité scientifique. Ce triangle constitue en effet un outil de synthèse incontournable pour caractériser et comparer les états isotropes et anisotropes de la turbulence. En se basant sur les invariants du tenseur d'anisotropie, il permet de situer de manière concise le degré et la nature de l'anisotropie d'un écoulement donné. Ainsi, son utilisation dans le cas du jet rond axisymétrique étudié garantit une lecture rigoureuse et universellement reconnue des résultats, tout en facilitant la mise en perspective avec d'autres travaux de la littérature.

7 Application du modèle de Kelwaramni et analyse par le diagramme de Lumley à partir des données expérimentales de Moutte

7.1 Estimation de la dissipation de l'énergie cinétique sur l'axe du jet

La dissipation de l'énergie turbulente au centre d'un jet est cruciale en recherche pour valider les modèles de turbulence et caractériser les plus petites échelles où l'énergie est convertie en chaleur. Sur le plan industriel, elle conditionne la conception et l'optimisation des dispositifs de mélange ou de combustion (e.g. dimensionnement des buses, contrôle de l'érosion) en définissant la capacité d'un jet à transférer et dissiper l'énergie de cisaillement. Enfin, maîtriser la dissipation permet d'améliorer la sécurité et la performance des structures hydrauliques soumises à des jets à haute vitesse, en limitant l'usure et les vibrations induites par l'écoulement

On part de la formule (24) ainsi que des deux relations suivantes :

$$\frac{U_j}{U_c} = k_u \cdot \frac{x - x_u}{D_{eq}} \quad \text{et} \quad \frac{L_u}{D_j} = k'_u \cdot \frac{x - x'_u}{D_j}$$

avec K_u et K_c sont des constantes empiriques caractérisant la diffusion longitudinale du jet.

D'où :

$$U_c = \frac{U_j D_{eq}}{k_u(x - x_u)} \quad \text{et} \quad L_u = k'_u(x - x'_u)$$

Alors on souhaite exprimer la dissipation de l'énergie adimensionnel :

$$\epsilon_c \cdot \frac{L_u}{U_c^3}$$

On remplace les expressions de L_u et U_c :

$$\begin{aligned} \epsilon_c \cdot \frac{k'_u(x - x'_u)}{\left(\frac{U_j D_{eq}}{k_u(x - x_u)}\right)^3} &= \epsilon_c \cdot \frac{k'_u(x - x'_u)}{\frac{U_j^3 D_{eq}^3}{k_u^3(x - x_u)^3}} \\ &= \epsilon_c \cdot \frac{k'_u k_u^3(x - x'_u)(x - x_u)^3}{U_j^3 D_{eq}^3} \end{aligned}$$

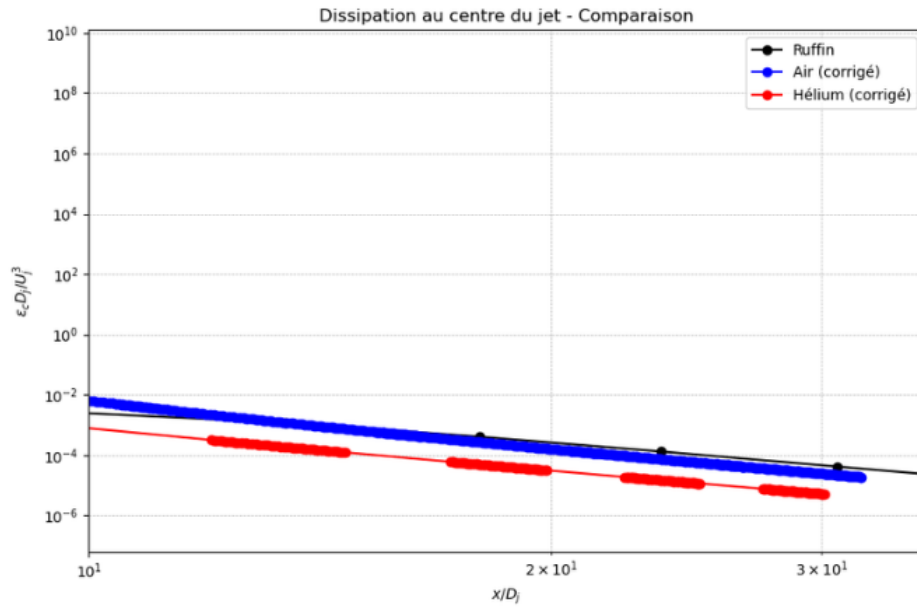
Donc l'expression devient de cette forme en fonction de D_j :

$$\epsilon_c \cdot \frac{L_u}{U_c^3} = \left(\epsilon_c \cdot \frac{D_j}{U_j^3} \right) \cdot \left(\frac{k'_u k_u^3(x - x'_u)(x - x_u)^3}{D_j D_{eq}^3} \right)$$

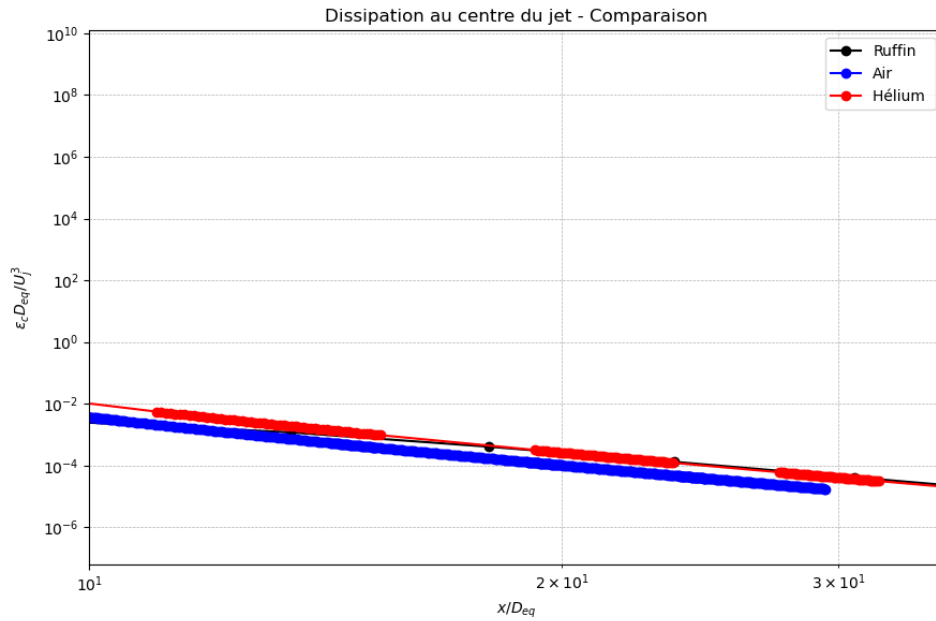
Et en fonction de D_{eq} , pour tenir compte de la variation de la masse volumique, on a :

$$\epsilon_c \cdot \frac{L_u}{U_c^3} = \left(\epsilon_c \cdot \frac{D_{eq}}{U_j^3} \right) \cdot \left(\frac{k'_u k_u^3(x - x'_u)(x - x_u)^3}{D_{eq}^4} \right)$$

À partir de ces équations, on peut tracer et comparer les résultats avec ceux universels de l'évolution de la dissipation d'énergie selon Ruffini [19]



(a) Comparaison en fonction de x/D_j



(b) Comparaison en fonction de x/D_{eq}

FIGURE 8 – Comparaison de la dissipation turbulente en fonction de x/D_j et x/D_{eq}

À partir de ces deux figures, on remarque qu'en fonction de x/D_j , l'hélium dissipe systématiquement moins d'énergie que l'air, en raison de sa densité plus faible. Cependant, lorsque les données sont normalisées par D_{eq} , qui tient compte du rapport densité, les deux jeux de données s'alignent étroitement sur la loi universelle de Ruffin, validant ainsi l'universalité du modèle.

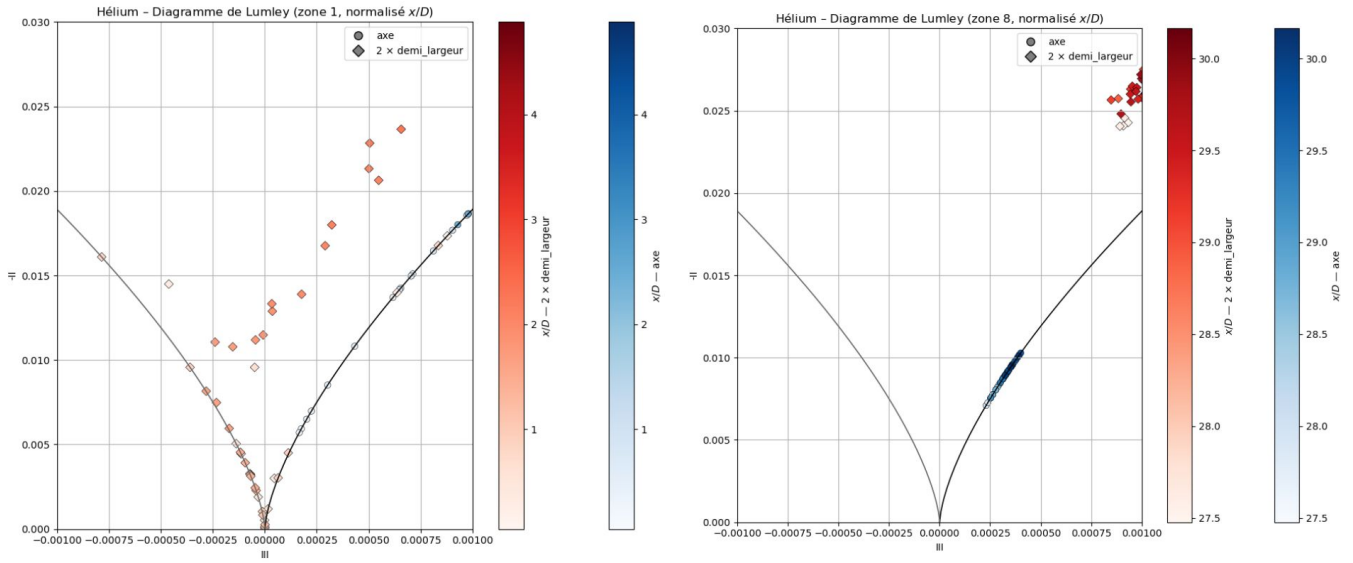


FIGURE 9 – Diagramme de Lumley du jet d’hélium (zones 1 et 8) normalisé en x/D_j

7.2 Jets air/hélium comparés par le diagramme de Lumley

7.2.1 Hélium

Pour la figure (9), qui montre les zones 1 et 8, on remarque que pour les petites valeurs de x/D_j , il existe une tendance vers l’anisotropie. En revanche, lorsqu’on s’éloigne (c’est-à-dire pour des valeurs plus élevées de (x/D_j) , on observe une évolution vers une zone quasi-isotrope.

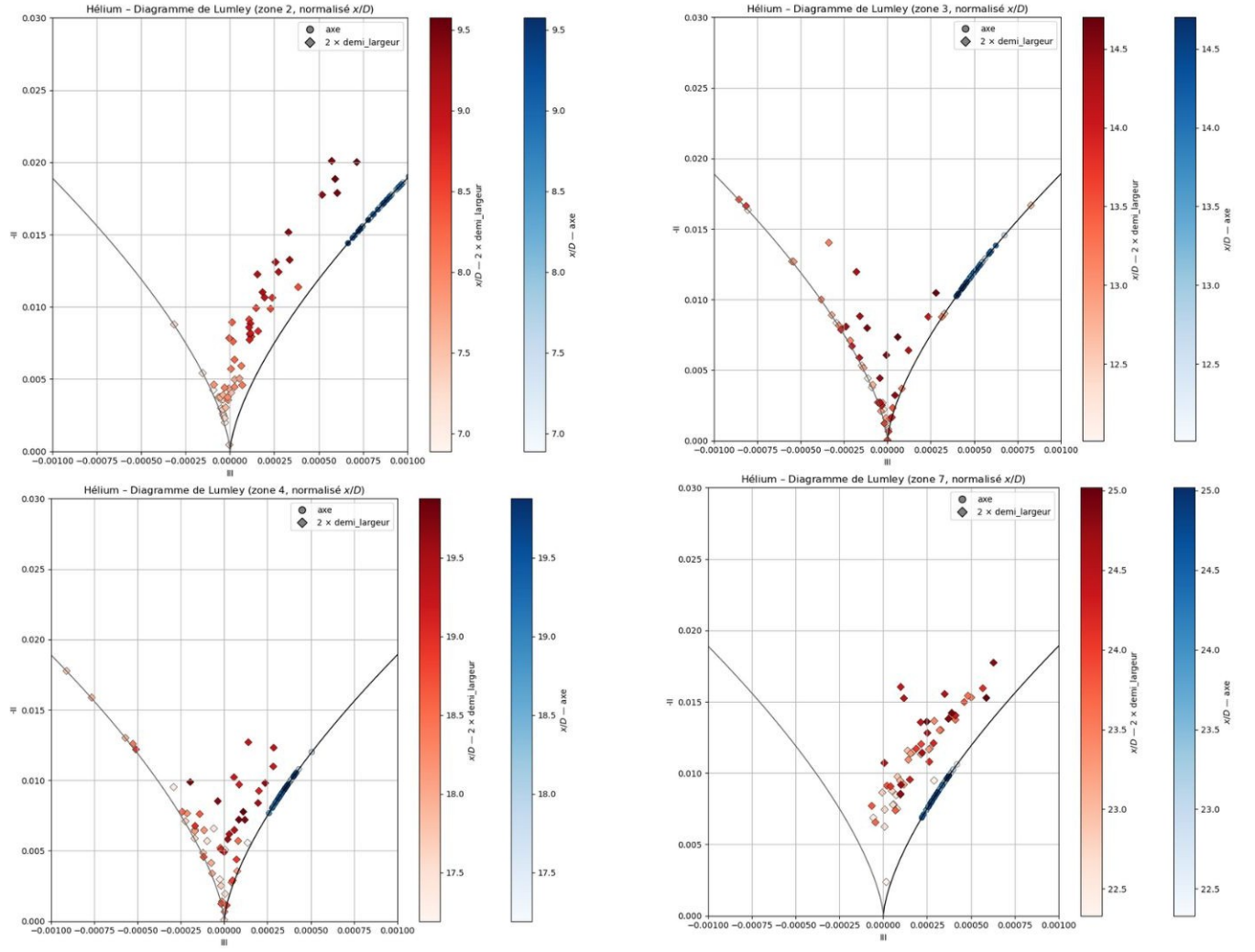


FIGURE 10 – Diagramme de Lumley du jet d'hélium (zones 2, 3, 4 et 7) normalisé en x/D_j

Pour la figure (10), qui montre les zones 2, 3, 4 et 7, les nuages de points convergent globalement vers une zone quasi-isotrope. Cependant, pour chaque zone spécifique, on remarque que plus la distance augmente, plus cette tendance vers la quasi-isotropie se confirme.

En revanche, en ce qui concerne les nuages de points au niveau de deux fois la demi-largeur, aucune tendance globale ne se dégage. On remarque que, pour chaque zone, une forme particulière ou une dominance spécifique apparaît.

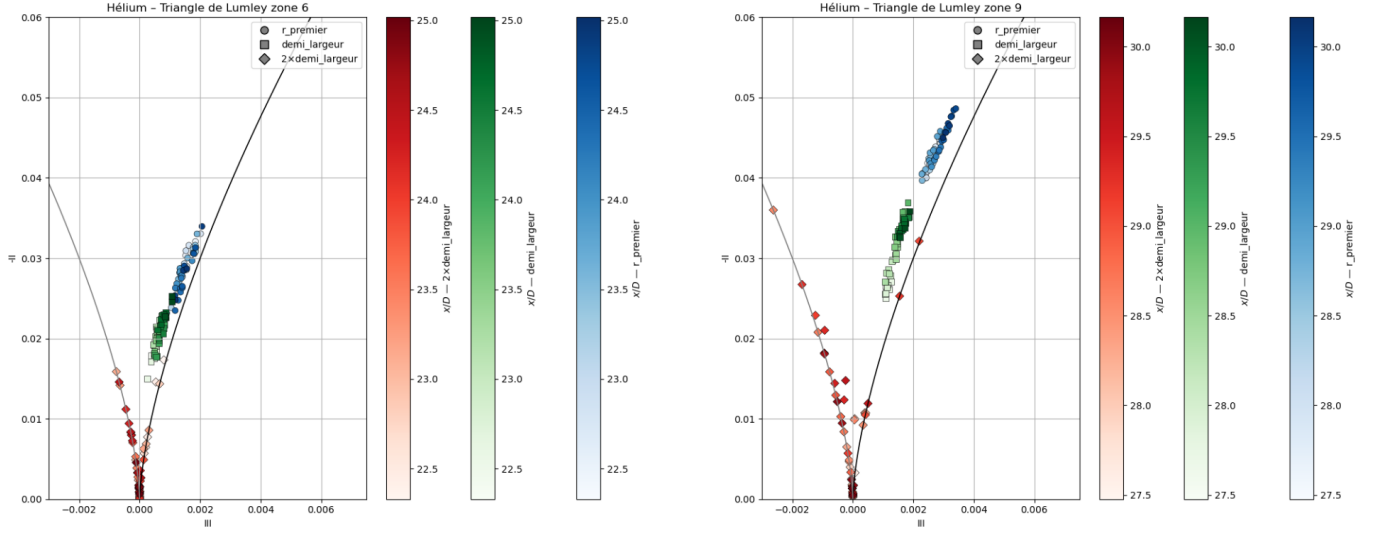


FIGURE 11 – Diagramme de lumley - zone 6 et 9

Pour la figure 11, qui montre les zones 6 et 9, on remarque qu’au niveau de deux fois la demi-largeur, le nuage de données est aligné avec la courbe de l’axisymètre contractant, en particulier dans la zone 9. En revanche, pour les premières valeurs de r et de la demi-largeur, on observe que plus la distance x augmente, plus le nuage de données tend globalement vers une zone proche du point d’isotropie.

7.2.2 Interprétation et conclusion

Dans ces diagrammes de Lumley, la turbulence du jet évolue d’un état fortement anisotrope — où les fluctuations sont majoritairement alignées avec la direction d’écoulement pour de faibles valeurs de x/Dj — vers un régime quasi-isotrope en s’éloignant de la source (grandes valeurs de x/Dj), témoignant d’un mélange et d’une diffusion accrus des structures tourbillonnaires. Cette tendance à l’isotropie est particulièrement marquée au cœur du jet, tandis qu’en périphérie (à $r = 2r_{1/2}$), les contraintes de Reynolds conservent des caractéristiques anisotropes spécifiques, notamment un alignement le long de la courbe d’axisymétrie contractante.

Ces observations illustrent la transition classique d’un jet turbulent : la production intense de turbulence par cisaillement initial cède progressivement le pas à la diffusion et à la dissipation, conduisant en aval à un état quasi-isotrope.

7.2.3 Air

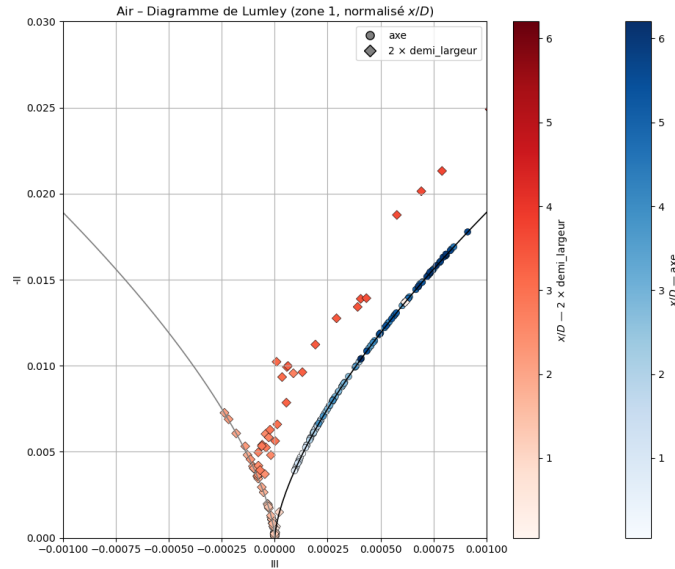


FIGURE 12 – Diagramme de lumley - zone 1

La figure 12, qui illustre la première zone, met en évidence qu'à mesure que l'on s'éloigne de la buse, l'écoulement converge vers une anisotropie.

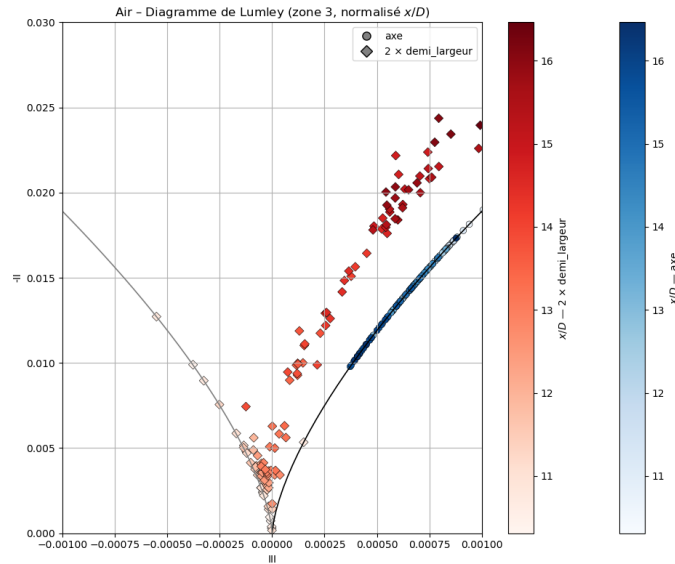


FIGURE 13 – Diagramme de lumley - zone 3

La figure 13, qui montre la zone 3, met en évidence que lorsque l'on s'éloigne selon l'axe x , l'écoulement tend vers l'isotropie, ce qui diffère du comportement observé dans la première zone. En ce qui concerne la demi-largeur, on remarque que les nuages de données s'alignent initialement avec la courbe correspondant à l'axe d'un jet axisymétrique contractant. Cependant, à mesure que x augmente, les données s'éloignent progressivement de cette courbe et convergent vers le centre du triangle.

Pour les autres zones (2, 4 et 7), on observe un comportement globalement similaire. Toutes les figures correspondantes sont présentées en annexe 10.2.

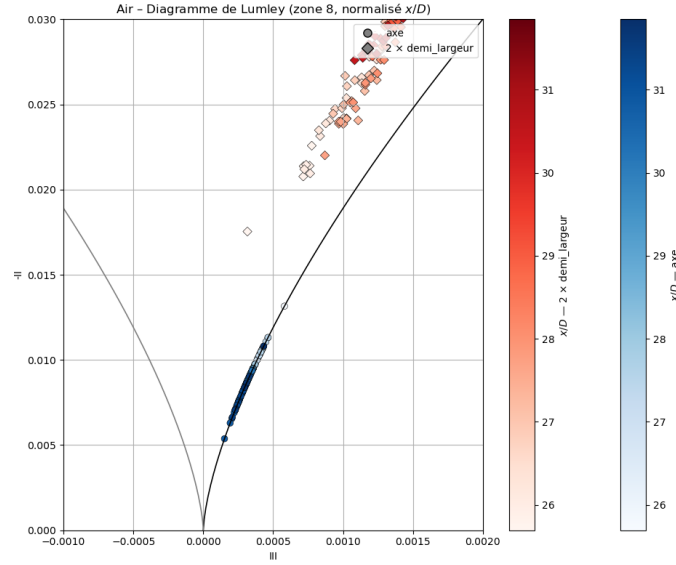


FIGURE 14 – Diagramme de lumley - zone 8

La courbe 14, qui correspond à la zone 8, présente un comportement totalement différent, notamment au niveau de deux fois la demi-largeur, où les nuages de données se situent au centre du triangle, loin de la courbe axisymétrique contractante. Cela indique une absence de dominance radiale et suggère une configuration plus chaotique de l'écoulement.

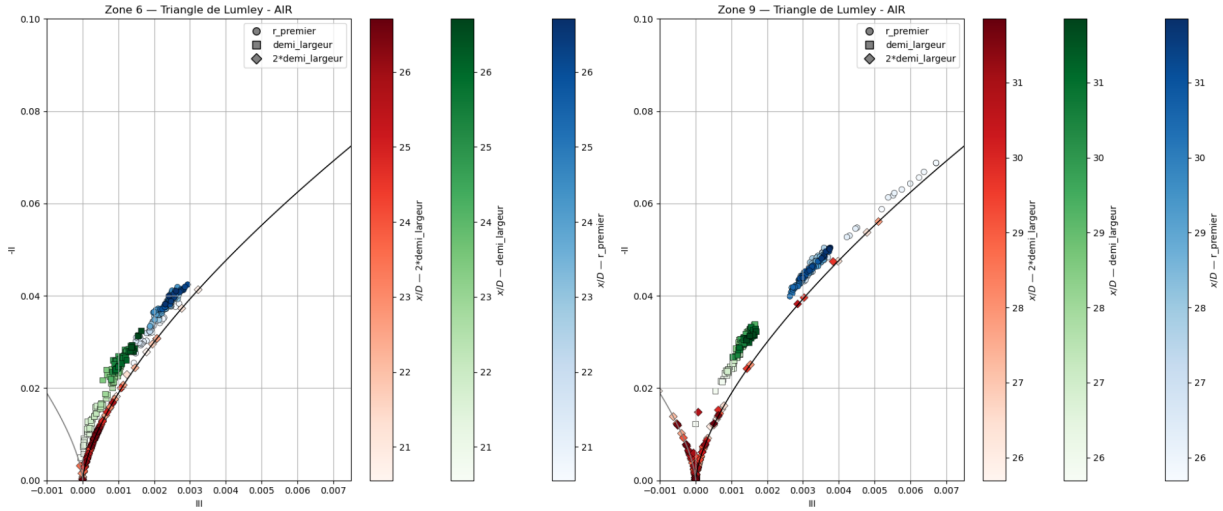


FIGURE 15 – Diagramme de lumley - zone 6 et 9

La figure 15 concerne les zones radiales, c'est-à-dire les zones 6 et 9. On remarque que, même dans ces zones radiales, il persiste une dominance axiale : les fluctuations axiales restent majoritaires par rapport aux fluctuations perpendiculaires à l'axe.

Une exception est toutefois observée dans la zone 9, où le comportement apparaît plus chaotique, les structures turbulentes semblant s'aligner selon les deux axes d'axisymétrie.

Globalement, on constate que lorsque le rayon r augmente, l'écoulement tend à converger vers une zone quasi-isotrope.

7.2.4 Interprétation et conclusion

Pour le jet d'air, l'évolution des invariants de Lumley met en évidence un écoulement initialement très anisotrope, caractérisé par des fluctuations majoritairement axiales près de la buse.

En s'éloignant longitudinalement, la turbulence tend progressivement vers un état quasi-isotrope, signe d'un mélange renforcé et d'un affaiblissement du cisaillement principal. Radialement, les données se disposent d'abord le long de la courbe de contraction axisymétrique — témoignant d'une dominance structurale liée à la géométrie du jet — avant de se disperser vers le centre du triangle à mesure que la diffusion turbulent s'accroît. À la périphérie, l'absence de net alignement radial et la présence de points proches du sommet isotrope traduisent une configuration plus chaotique, où la production et la dissipation de turbulence s'équilibrent.

Ces observations confirment la transition classique d'un jet : une production intense de turbulence par cisaillement cède progressivement la place à la diffusion et à la dissipation, conduisant en aval à un état quasi-isotrope.

7.3 Diagramme de Lumley à partir des lois de similitude

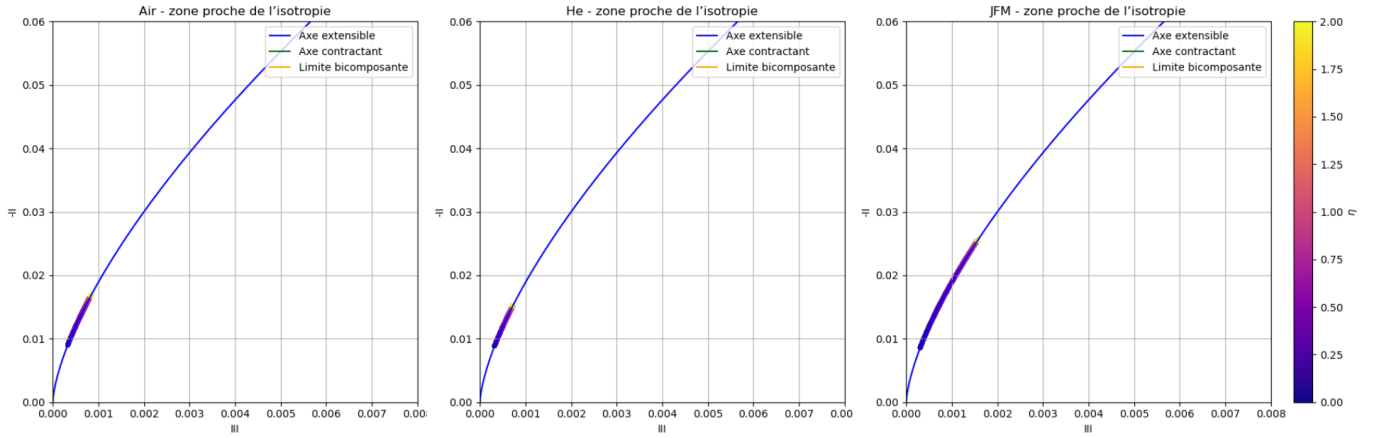


FIGURE 16 – Cette figure illustre le diagramme de Lumley (coordonnées III en abscisse et $-II$ en ordonnée) dans la zone proche de l'isotropie pour trois jets turbulents : (a) jet d'air, (b) jet d'hélium et (c) configuration JFM.

Alors, à partir des trois figures ci-dessus, on remarque que, dans les trois cas, la distribution des résultats est assez similaire, car tous les résultats sont alignés avec la courbe extensible. Deuxièmement, on observe que plus on se rapproche de l'axe du jet, plus on converge vers l'isotropie, tandis que lorsqu'on s'en éloigne, on observe une anisotropie.

8 Optimisation du système PLIF

8.1 Positionnement du problème

Dans les mesures de concentration par fluorescence induite par laser (PLIF), la précision des données repose fortement sur la capacité à distinguer le signal fluorescent du bruit de fond. Or, dans certaines configurations expérimentales, comme celle de A. Moutte [15], le contraste entre les zones fluorescentes et l'arrière-plan est insuffisant. Malgré l'utilisation d'une caméra 12 bits offrant théoriquement 4096 niveaux de gris, les niveaux observés restaient faibles : les zones supposées lumineuses atteignaient à peine 800 niveaux, et les zones sombres environ 60. Cette faible dynamique rend la séparation entre signal utile et bruit électronique difficile, compromettant la fiabilité des mesures.

Ce problème s'aggrave à mesure que l'on s'éloigne de la sortie du jet, où la concentration d'acétone diminue, réduisant davantage l'intensité de fluorescence (jusqu'à 200 niveaux de gris). Dans ces conditions, le signal devient comparable au bruit de fond, augmentant le risque d'erreurs dans la quantification de la concentration.

Les figures suivantes illustrent visuellement cette problématique de faible contraste :

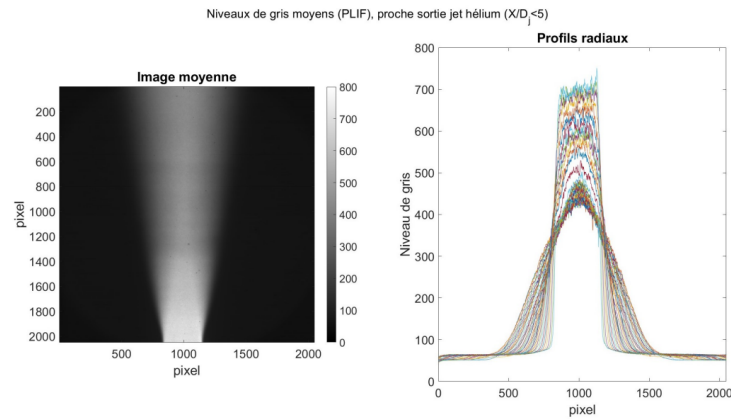


FIGURE 17 – Image PLIF dans une zone proche de la sortie du jet : le contraste entre zones lumineuses et sombres est déjà limité (niveau max ~ 800 , niveau min ~ 60) [1].

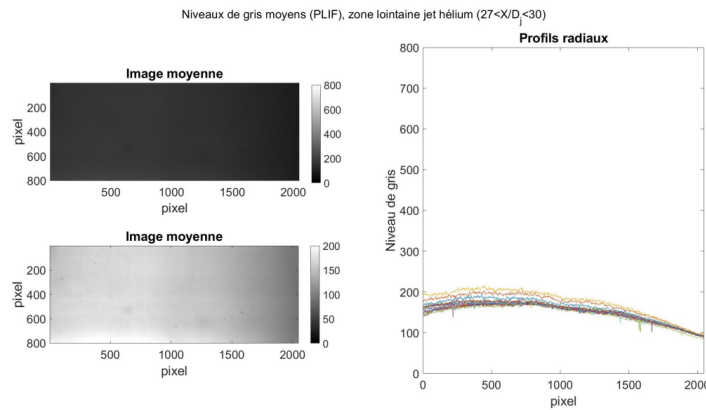


FIGURE 18 – Image PLIF plus éloignée de la sortie du jet : l'intensité de fluorescence diminue fortement (niveau max ~ 200), rendant le signal difficile à distinguer du bruit [1].

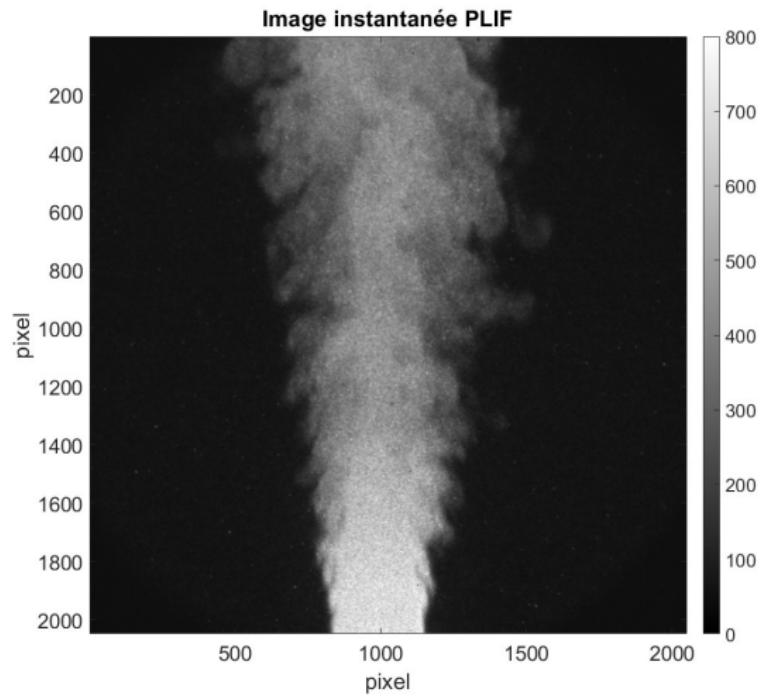


FIGURE 19 – Histogramme des niveaux de gris enregistrés : la plage utile du capteur (4096 niveaux) est sous-exploitée, concentrée dans la tranche 50–800.[1]

Ces figures confirment la faible dynamique du système d’acquisition, en particulier dans les zones à faible concentration d’acétone. Cela justifie pleinement la nécessité de revoir et optimiser le système PLIF pour améliorer le contraste et la fiabilité des mesures.

Le laboratoire utilise depuis 2013 un code MATLAB développé par Florian Reissner, l’objectif principal de ce programme est de modéliser le système optique de l’expérience, constitué de plusieurs lentilles sphériques et cylindriques, afin de prédire le comportement du faisceau laser. Plus précisément, le code permet, à partir des paramètres géométriques (focales des lentilles, distances entre elles, diamètre et divergence initiale du faisceau), de calculer les caractéristiques optiques telles que la focale équivalente (formule de Gullstrand), la position du foyer image, la divergence et le diamètre du faisceau après chaque lentille, ainsi que l’épaisseur et la profondeur de la nappe laser au niveau du jet. Ce code constitue donc un outil de simulation et d’ajustement géométrique visant à optimiser la focalisation du faisceau pour la PLIF.

Comme je l’ai déjà mentionné dans le premier chapitre, ce code, associé au système optique préparé par Moutte, ne donne pas de résultats satisfaisants pour la PLIF. Plus tard, un stagiaire nommé Balde, après vérification, a indiqué dans son rapport [1] que le code fonctionnait bien avec les rayons verts, mais pas avec les rayons UV.

Il a également proposé un nouveau schéma pour ce système, comprenant notamment la modification des miroirs dichroïques et l’ajout de quelques lentilles afin de réduire la taille du faisceau PLIF. La figure 20 illustre les modifications apportées par Balde au système optique.

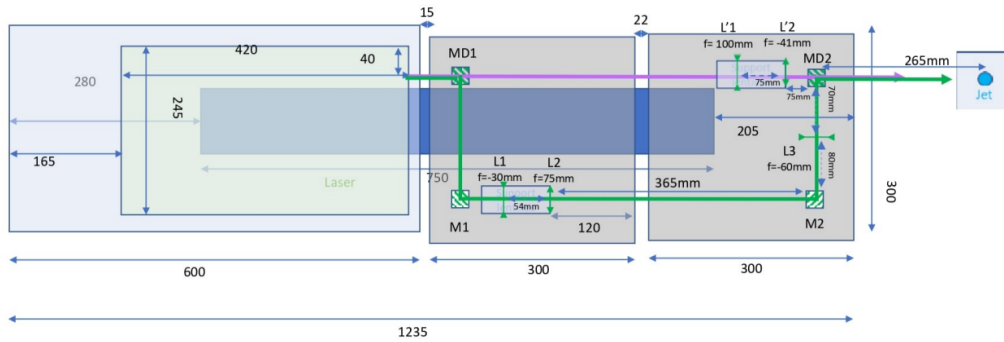


FIGURE 20 – Modifications du système optique proposées par Balde [1].

L'idée sur laquelle je vais baser ma réflexion est la suivante : au lieu de modifier le code ou la simulation à chaque fois, puis de les tester directement en salle de manipulation, ce qui n'est pas toujours nécessaire, je propose de limiter au maximum le contact avec le laser en raison de ses dangers. Mon encadrante Muriel m'a d'ailleurs partagé une courte formation à ce sujet, sur les risques liés aux lasers.

Ainsi, l'objectif serait de comparer systématiquement les résultats de chaque test ou idée avec ceux obtenus à partir de ce code, avant de passer à une expérience réelle avec le laser.

Pour résoudre ce problème, j'ai d'abord envisagé d'utiliser un logiciel gratuit permettant de simuler des systèmes optiques. C'est ainsi que j'ai découvert Zemax OpticStudio, un logiciel développé par ANSYS. Nous avons pu accéder à une version étudiante, ce qui nous a permis de faire quelques tests. Après un mois d'autoformation pour maîtriser les bases du logiciel, nous avons été confrontés à un obstacle : la difficulté de bien définir la source lumineuse. En effet, le logiciel propose deux modes : séquentiel et non séquentiel. La version étudiante permet uniquement d'utiliser le mode séquentiel, dans lequel il n'est pas possible d'insérer directement une source laser. Il faut la définir manuellement en traçant la forme du faisceau point par point, chaque rayon étant considéré comme un faisceau individuel. Le faisceau laser complet est alors une superposition de ces rayons. Le problème rencontré est que les rayons convergent tous spontanément, même sans passer par une lentille ou un système optique. Par manque de temps et de ressources, nous avons dû arrêter l'utilisation de ce logiciel.



FIGURE 21 – logo de zmax optic studio

Cependant, je pense que Zemax reste une piste intéressante pour l'avenir et pour le développement de ce type de systèmes optiques. D'ailleurs, cela m'a personnellement permis de mieux comprendre le rôle de l'optique dans la mécanique des fluides.

8.2 Méthodologie et solution proposée

Afin de mieux illustrer notre démarche, la Figure 20 présente un rappel schématique de la configuration optique (inspirée du schéma de Blade), avec un zoom sur la zone d'intérêt sur laquelle nous concentrons notre analyse. On y distingue la source laser, suivie d'une succession de lentilles (convergente, divergente puis cylindrique) permettant de former une nappe laser avant son interaction avec l'écoulement turbulent. Après l'échec de la première proposition, nous sommes parvenus à la conclusion que le problème provenait du code lui-même. Après quelques recherches, nous avons émis l'hypothèse que l'erreur pouvait être due à un manque de détails dans le code, notamment concernant l'indice de réfraction des lentilles ou la longueur d'onde du faisceau.

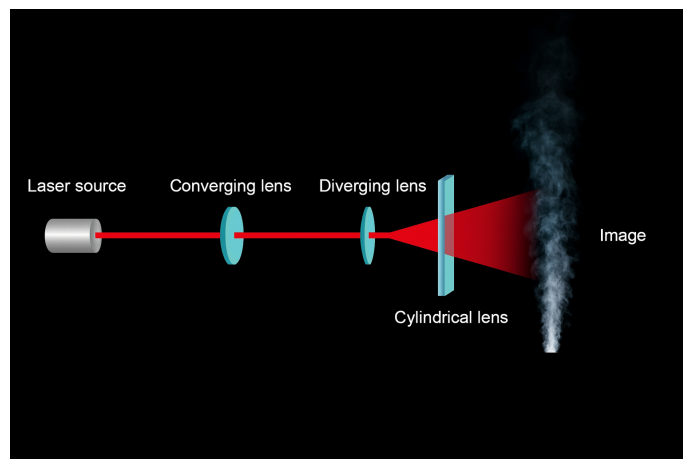


FIGURE 22 – Schéma de la configuration optique

Afin d'intégrer ces paramètres, nous devons utiliser une relation mathématique qui les relie. Nous avons trouvé deux lois possibles : la loi de Cauchy et celle de Sellmeier. Cependant, la loi de Cauchy est limitée au domaine du visible et de l'infrarouge proche, tandis que la loi de Sellmeier couvre un spectre plus large (UV – visible – IR), en particulier les régions proches des raies d'absorption.

La loi de Sellmeier, fondée sur la modélisation des résonances électroniques à l'aide d'oscillateurs harmoniques (modèle de Lorentz), s'exprime sous la forme suivante :

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{B_i \lambda^2}{\lambda^2 - C_i}$$

où chaque paire de coefficients (B_i, C_i) correspond à une raie de résonance effective, n désigne l'indice de réfraction et λ la longueur d'onde.

Cette formulation offre une excellente précision sur de larges gammes spectrales (UV à IR) et prend en compte l'influence des absorptions matérielles, au prix d'un nombre plus important de paramètres et de calculs légèrement plus lourds. Dans notre code MATLAB, la loi de Sellmeier est intégrée dès la lecture des coefficients B et C , ainsi que de la longueur d'onde λ . Grâce à cette intégration, chaque propriété ou équation optique est modifiée en conséquence.

Le tableau ci-dessous présente ces modifications ; les éléments justificatifs correspondants sont fournis en annexe.

TABLE 3 – Comparaison des équations avant et après intégration de la loi de Sellmeier

Étape	Sans Sellmeier	Avec Sellmeier
Indice de réfraction	$n = n_{\text{ref}}$ (constante)	$n(\lambda) = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^3 \frac{B_j \lambda^2}{\lambda^2 - C_j}}$
Puissance optique	$P_i = \frac{1}{f_i}$	$P_i(\lambda) = \frac{n(\lambda) - 1}{n_{\text{ref}} - 1} \frac{1}{f_i}$
Origine virtuelle	$\text{FD}_0 = -\frac{\text{DM1}}{2 \tan(\frac{\text{BD}_0}{2})}$	même formule (inchangée)
Foyers effectifs en cascade	$\text{FD}_1 = \frac{1}{P_1 + 1/\text{FD}_0}, \text{FD}_2 = \frac{1}{P_2 - 1/(d_{12} - \text{FD}_1)}, \dots$	mêmes formules, en remplaçant P_i par $P_i(\lambda)$
Divergences	diamètres	$\text{BD}_1 = 2\left(\frac{\text{DM1}}{2\text{FD}_1}\right), \text{DM}_2 = 2 \tan\left(\frac{\text{BD}_1}{2}\right) (d_{12} - \text{FD}_1), \dots$
mêmes formules		mêmes formules
Épaisseur & profondeur	épaisseur = $2 \left \tan(\text{BD}_2/2) \right [(d_{1J} - d_{12}) - \text{FD}_2], \dots$	

Différence entre n_{ref} et $n(\lambda)$ Le paramètre n_{ref} correspond à l'indice de réfraction du matériau (ici du BK7) évalué à la longueur d'onde de référence $\lambda_{\text{ref}} = 532 \text{ nm}$. Il sert à fixer la « courbure optique » $\mathcal{C} = (n_{\text{ref}} - 1)\mathcal{C}$ associée à la focale de base f_i . En revanche, $n(\lambda)$ (noté n_λ) est l'indice de réfraction calculé à toute longueur d'onde λ via l'équation de Sellmeier

$$n(\lambda) = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^3 \frac{B_j \lambda^2}{\lambda^2 - C_j}} \quad (\lambda \text{ en } \mu\text{m}),$$

ce qui permet de prendre en compte la dispersion chromatique du verre. Ainsi, on passe de la puissance de référence

$$P_{i,\text{ref}} = \frac{1}{f_i} = (n_{\text{ref}} - 1)\mathcal{C}$$

à la puissance *chromatique*

$$P_i(\lambda) = \frac{n(\lambda) - 1}{n_{\text{ref}} - 1} \frac{1}{f_i},$$

en adaptant la contribution de $(n - 1)$ selon la longueur d'onde étudiée.

8.3 Résultats et discussion

Nous avons commencé nos tests sur la base de nos premiers résultats. Pour ce faire, et comme déjà mentionné, nous avons choisi de travailler d'abord avec le laser vert à 532 nm, en comparant les résultats obtenus avec le code de Fabien (figure 21) et ceux issus de notre propre code (figure 22). En l'absence de description précise, dans le laboratoire, du type de matériau utilisé, nous avons décidé de considérer **le verre BK7 (Schott, validité 0,3–2,5 μm)**, couramment employé en optique et pour les faisceaux laser. Les résultats correspondants sont présentés ci-après. Le code utilisé pour réaliser cette simulation est donné en annexe.

Lentilles Optiques pour l'expérience laser

point focal F1 [mm]	100	Power L1: 10.0 Dioptries Power L2: -24.4 Dioptries
point focal F2 [mm]	-41	
point focal cylindric [mm]	-60	Gullstrand Power: -0.0 Dioptries Back Focal Length: Inf mm
Distance L1-L2 [mm]	59	Focal P L1: 105.3 mm Focal P L2: -360.4 mm
Distance L1-L3 [mm]	150	Beam Div L1: 57.0 mrad Beam Div L at Jet: 7.3 mrad Beam Div H at Jet: 62.3 mrad
Distance L1-Jet [mm]	510	Distance L1-L2: 59.0 mm Distance L1-J: 510.0 mm Distance L2-J: 451.0 mm
Divergence (full) [mrad]	3.0	Beam Diameter at L2: 2.6 mm Beam Diameter at L3: 3.3 mm
Diameter at L1 [mm]	6.0	Sheet thickness at Jet: 5.9 mm Sheet depth at Jet: 25.8 mm
Calc Current		
Calc Inf		Calc Dist

FIGURE 23 – code initial

```

P1=10.1 D P2=-24.5 D P3=-16.8 D
FD1=104.7 mm FD2=-380.0 mm FD3=-53.0 mm

Epaisseur @ jet : 5.7 mm
Profondeur @ jet : 25.3 mm

```

FIGURE 24 – Résultat après modification du code - vert 532 nm

Les deux figures suivantes montrent que les résultats obtenus pour le laser vert, de longueur d'onde 532 nm, sont presque similaires avec les deux versions du code, avec un écart relativement faible, ce qui reste globalement satisfaisant.

$$\delta_{\text{épaisseur}} = \frac{5,7 - 5,9}{5,9} \times 100\% \approx -3,39\%, \quad |\delta_{\text{épaisseur}}| = 3,39\%,$$

$$\delta_{\text{profondeur}} = \frac{25,3 - 25,8}{25,8} \times 100\% \approx -1,94\%, \quad |\delta_{\text{profondeur}}| = 1,94\%.$$

Les résultats montrent une baisse de l'épaisseur de 3,39 % et de la profondeur de 1,94 %, indiquant que notre modification de code affecte davantage l'épaisseur du faisceau que sa pénétration.

Nous considérons à présent le cas de l'ultraviolet. Pour ce domaine spectral, nous avons choisi de travailler avec un matériau adapté pour les lentilles, à savoir la **silice fondue UV-grade (Malitson, 20 °C, validité 0,21–3,71 µm)**. Les résultats obtenus avec notre code modifié sont présentés ci-après.

```

P1=10.9 D P2=-26.6 D P3=-18.2 D
FD1=96.2 mm FD2=3103.9 mm FD3=-56.1 mm

Epaisseur @ jet : 2.0 mm
Profondeur @ jet : 16.7 mm

```

FIGURE 25 – Résultat après modification du code - UV

Dans ce cas, je vais comparer les résultats de la figure 20, car ce code ne prend pas en compte la longueur d'onde ni l'indice de réfraction, pour l'ultraviolet sans la loi de Sellmeier (figure 21) et avec la loi de Sellmeier (figure 23). On constate que l'introduction de la loi de Sellmeier entraîne une réduction significative de l'épaisseur et de la profondeur du faisceau.

- **Épaisseur** : passage de $\delta_{\text{sans}} = 5.9 \text{ mm}$ à $\delta_{\text{avec}} = 2.0 \text{ mm}$, soit une baisse de

$$\Delta_{\text{épaisseur}} = \frac{\delta_{\text{avec}} - \delta_{\text{sans}}}{\delta_{\text{sans}}} \times 100 = \frac{2.0 - 5.9}{5.9} \times 100 \approx -66.1\%.$$

- **Profondeur** : passage de $p_{\text{sans}} = 25.8 \text{ mm}$ à $p_{\text{avec}} = 16.7 \text{ mm}$, soit une baisse de

$$\Delta_{\text{profondeur}} = \frac{p_{\text{avec}} - p_{\text{sans}}}{p_{\text{sans}}} \times 100 = \frac{16.7 - 25.8}{25.8} \times 100 \approx -35.3\%.$$

Ces résultats montrent que notre modification de code affecte davantage l'épaisseur du faisceau (-66.1%) que sa pénétration (-35.3%), ce qui est cohérent avec l'influence plus forte de la dispersion (décrite par la loi de Sellmeier) sur le confinement latéral du faisceau.

Cependant, ces résultats restent encore relatifs, car je n'ai pas terminé le travail dans les délais et je n'ai donc pas pu les tester en salle de manipulation. De plus, il manque une description détaillée des lentilles et de leur matériau pour extraire au mieux les valeurs des coefficients.

Néanmoins, ceci ouvre des pistes intéressantes pour la suite du développement de ce système optique.

8.4 Optimisation finale

Afin de mener à bien l'optimisation des paramètres optiques, nous avons exploré différentes approches possibles. Après analyse, nous avons retenu la méthode de dichotomie, une technique simple et robuste permettant de rechercher de manière itérative la valeur optimale d'un paramètre dans un intervalle donné.

8.4.1 Présentation de la méthode de dichotomie

Nous disposons d'une fonction

$$\text{DM4h} : d_{12} \mapsto \text{épaisseur du plan focal (en m)}$$

qui modélise, pour un faisceau optique traversant trois lentilles, la « sheet depth » au niveau du jet. L'objectif est de trouver la valeur $d_{12} > 0$ (distance L1-L2, en m) telle que

$$\text{DM4h}(d_{12}) = 1 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

Définition de la fonction à résoudre

On définit

$$f(d_{12}) = \text{DM4h}(d_{12}) - 1 \times 10^{-3}.$$

Chercher d_{12} tel que

$$f(d_{12}) = 0.$$

Principe de la méthode de la bisection

Soient a et b deux bornes telles que

$$a < b \quad \text{et} \quad f(a)f(b) < 0.$$

L'algorithme bisection itère la procédure suivante :

1. Calculer le point médian

$$c = \frac{a + b}{2}.$$

2. Évaluer $f(c)$.
3. Si $f(a)f(c) < 0$, alors la racine est dans $[a, c]$: on pose $b \leftarrow c$.
4. Sinon (donc $f(c)f(b) < 0$), la racine est dans $[c, b]$: on pose $a \leftarrow c$.
5. Répéter jusqu'à ce que $\frac{b-a}{2}$ soit inférieur à la tolérance désirée ε .

On obtient alors une approximation de la racine

$$d_{12}^* \approx \frac{a+b}{2}.$$

8.4.2 Application numérique

Vert 532 nm – avec le code de Florian Reissner

Pour trouver les valeurs du débit en a et b, voir le code Python en annexe, lequel effectue ce calcul automatiquement.

The screenshot shows a software window titled "Lentilles Optiques pour l'expérience laser". It features several input fields on the left and a list of calculated parameters on the right.

Input Parameters	Calculated Results
point focal F1 [mm]: 100	Power L1: 10.0 Dioptries
point focal F2 [mm]: -41	Power L2: -24.4 Dioptries
point focal cylindric [mm]: -60	Gullstrand Power: 3.6 Dioptries
Distance L1-L2 [mm]: 73.6	Back Focal Length: 74.1 mm
Distance L1-L3 [mm]: 150	Focal P L1: 105.3 mm
Distance L1-Jet [mm]: 510	Focal P L2: 139.0 mm
Divergence (full) [mrad]: 3.0	Beam Div L1: 57.0 mrad
Diameter at L1 [mm]: 6.0	Beam Div L at Jet: -13.0 mrad
	Beam Div H at Jet: 0.6 mrad
	Distance L1-L2: 73.6 mm
	Distance L1-J: 510.0 mm
	Distance L2-J: 436.4 mm
	Beam Diameter at L2: 1.8 mm
	Beam Diameter at L3: 0.8 mm
	Sheet thickness at Jet: 3.9 mm
	Sheet depth at Jet: 1.0 mm

Buttons at the bottom: Calc Current, Calc Inf, Calc Dist.

FIGURE 26 – Résultat avec les distances optimales- Vert

À partir de ces résultats, on remarque que la profondeur de nappe obtenue avec une distance entre la première et la deuxième lentille égale à 73,6 mm — valeur déterminée grâce à notre méthode d'optimisation —, tout en conservant constantes les distances entre la première et la troisième lentille ainsi qu'entre la première lentille et le jet, peut atteindre une valeur de 1 mm pour le sheet depth.

Ultraviolet 266 nm – avec mon code

Avec le code en annexe, on trouve que la distance optimale entre L_1 et L_2 est de 66,45 mm. Voici le résultat obtenu à partir du code Python.

```

P1=10.9 D P2=-26.6 D P3=-18.2 D
FD1=96.2 mm FD2=141.5 mm FD3=-1093.9 mm

Epaisseur @ jet : 4.0 mm
Profondeur @ jet : 1.0 mm

```

FIGURE 27 – Résultat avec les distances optimales- UV

On peut dire la même chose pour le cas de l'ultraviolet : les autres distances sont maintenues constantes et seule la distance entre la première et la deuxième lentille est variée. On trouve alors que l'on peut atteindre cette valeur.

9 conclusion générale

Cette expérience de stage a été particulièrement enrichissante, tant sur le plan personnel que professionnel, puisqu'il s'agissait de ma première immersion dans un laboratoire de recherche. Le sujet des jets turbulents, bien que complexe et exigeant, s'est révélé extrêmement intéressant en raison de ses nombreuses applications industrielles (aéronautique, énergétique, procédés chimiques, etc.). Il offre en effet un champ d'étude vaste, à la fois du point de vue analytique, avec le recours à des modèles comme celui de Kewalramani, et du point de vue expérimental, notamment à travers la mise en œuvre de diagnostics optiques.

Ce travail m'a permis de prendre conscience du rôle fondamental de l'optique dans la mécanique des fluides, en particulier dans l'étude des jets turbulents. L'utilisation d'un système optique basé sur plusieurs lentilles, couplé à un code MATLAB de simulation, a mis en évidence l'importance de l'optimisation des paramètres pour obtenir une nappe laser adaptée aux mesures de PLI. Bien que certaines parties du projet n'aient pas pu être finalisées, comme la validation expérimentale complète des résultats optiques, ce travail constitue une base solide pour de futures investigations.

Sur le plan théorique, l'étude des modèles de turbulence appliqués aux jets m'a permis d'approfondir ma compréhension de la dynamique turbulente. Les hypothèses simplificatrices, les limites de validité des modèles et les approches numériques m'ont montré à quel point la turbulence reste un champ de recherche ouvert et difficile. L'utilisation du diagramme de Lumley, en particulier, s'est révélée précieuse pour caractériser l'anisotropie des contraintes de Reynolds et pour situer les régimes observés dans le jet par rapport aux différentes configurations de turbulence. Cet outil constitue un lien fondamental entre la théorie, la modélisation et l'expérience.

Enfin, cette expérience m'a également ouvert à l'importance croissante de la simulation numérique en mécanique des fluides. L'utilisation d'outils comme ANSYS Fluent représente une véritable extension du travail expérimental, permettant de tester des configurations et d'optimiser les paramètres avant même de réaliser les expériences physiques. Si j'ai eu seulement un aperçu de ce potentiel, je suis convaincu que la maîtrise de ces logiciels est un atout majeur pour progresser dans ce domaine, car ils constituent en quelque sorte un « laboratoire virtuel » complémentaire aux manipulations expérimentales.

En somme, ce stage m'a permis de développer des compétences techniques et scientifiques, mais aussi une meilleure vision des enjeux liés à la recherche appliquée en mécanique des fluides. Si

l'occasion m'en est donnée, je serais très motivé à poursuivre mes travaux dans ce domaine, car il combine rigueur scientifique, innovation technologique et applications concrètes à fort impact.

Références

- [1] Mouhamadou Salihou Baldé. Mesures simultanées de vitesse et concentration par diagnostic laser : impact des variations de densité sur la structure fine du mélange dans un jet turbulent. Mémoire de master 1, Aix-Marseille Université, Marseille, France, 2024.
- [2] Thomas Basset, Bianca Viggiano, Thomas Barois, Mathieu Gibert, Nicolas Mordant, Raúl Bayoán Cal, Romain Volk, and Mickaël Bourgoïn. Entrainment, diffusion and effective compressibility in a self-similar turbulent jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 947 :A29, 2022.
- [3] Issam Benhaddou, Abdelilah Chikhi, and Anis Rezaiguia. Modèle analytique du développement d'un jet turbulent à masse volumique variable. Rapport de projet 3a - fetes, École Centrale de Marseille et IRPHE, Marseille, France, 2025.
- [4] Joseph Valentin Boussinesq. Modeling the reynolds stresses : Boussinesq eddy-viscosity postulate. Webpage, Georgia Institute of Technology, —. “Boussinesq (1877) postulated that the transfer of momentum due to turbulent eddies could be modeled with an eddy viscosity”.
- [5] Patrick Chassaing. *Turbulence en Mécanique des Fluides*. CEA / Éditions Eyrolles, Paris, France, 2000. Le livre comprend trois parties : phénomène, équations, données expérimentales et modélisation. Avec compléments et exercices corrigés.
- [6] Alexis Darisse, Jean Lemay, and Azemi Benaïssa. Budgets of turbulent kinetic energy, reynolds stresses, variance of temperature fluctuations and turbulent heat fluxes in a round jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 774 :95–142, 2015.
- [7] AO Demuren, MM Rogers, P Durbin, and SK Lele. On modeling pressure diffusion in non-homogeneous shear flows. *Studying Turbulence Using Numerical Simulation Databases*, 1996.
- [8] José Ricardo Figueiredo. A statistical dynamic model for the turbulent transport of kinetic energy in shear layers. *Journal of Aerospace Technology and Management*, 10, 2018.
- [9] Ya’nan Gao, Qin Li, Yingda Huo, and Ying Wang. Application of simultaneous piv and plif in study of flow field system. 2023.
- [10] Thomas B Gatski and Charles G Speziale. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *Journal of fluid Mechanics*, 254 :59–78, 1993.
- [11] GA Gerolymos and I Vallet. Algebraic proof and application of lumley’s realizability triangle. *arXiv preprint arXiv :1610.03468*, 2016.
- [12] Gagan Kewalramani. *Experimental and theoretical analysis of a turbulent two-phase jet*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2023.
- [13] Gagan Kewalramani, Bowen Ji, Yvan Dossmann, Simon Becker, Michel Gradeck, and Nicolas Rimbert. A simple analytical model for turbulent kinetic energy dissipation for self-similar round turbulent jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 983 :A44, 2024.

- [14] Marie laure Ducasse. *Mélange d'un scalaire dans un jet turbulent : influence d'un obstacle*. PhD thesis, Aix-Marseille, 2012.
- [15] Alexandre Moutte. *Etude de jets turbulents à masse volumique variable : impact de la variation de masse volumique sur la structure fine et le mélange*. PhD thesis, Ecole Centrale Marseille, 2018.
- [16] Stephen B Pope. A more general effective-viscosity hypothesis. *Journal of Fluid Mechanics*, 72(2) :331–340, 1975.
- [17] Stephen B Pope. Turbulent flows. *Measurement Science and Technology*, 12(11) :2020–2021, 2001.
- [18] Ludwig Prandtl. Motion of fluids with very little viscosity. Technical report, 1928.
- [19] Emmanuel Ruffin, R Schiestel, Fabien Anselmet, Muriel Amielh, and L Fulachier. Investigation of characteristic scales in variable density turbulent jets using a second-order model. *Physics of Fluids*, 6(8) :2785–2799, 1994.
- [20] Sergei Smirnov, Alexander Smirnovsky, and Sergey Bogdanov. The emergence and identification of large-scale coherent structures in free convective flows of the rayleigh-bénard type. *Fluids*, 6 :431, 11 2021.
- [21] Hendrik Tennekes and John Leask Lumley. *A first course in turbulence*. MIT press, 1972.
- [22] Israel Wygnanski and Ho Fiedler. Some measurements in the self-preserving jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 38(3) :577–612, 1969.

10 Annexe

10.1 Élaboration du diagramme de Lumley selon les lois de similitude — implémentation en Python

```

1  # -*- coding: utf-8 -*-
2  """
3  Created on Wed Jun 25 01:12:19 2025
4  Triangle de Lumley      mod le self-similar pur
5  @author: abdelilah chikhi
6  """
7  import numpy as np
8  import matplotlib.pyplot as plt
9  from math import exp
10
11 # 1) Param tres de votre mod le
12 chi    = -1
13 C1u, C2u = 0.85 , 0.09
14 C1v, C2v = 0.54 , 0.043
15 Cuv     = 0.03
16 dbm_dy  = 0.1
17 uc      = 1.0
18
19 # 2) Fonction qui calcule II et III      partir de
20 def lumley_invariants_eta(eta):
21     exp_term = np.exp(-2 * eta**2)
22     A = 1 - 2*chi*eta**2 + 3*chi
23     B = ((1 + 2*chi)*(1 - np.exp(-eta**2))) \
24         / (2*eta**2 * np.exp(-eta**2)) if eta != 0 else 0
25     common = (((1/chi) * dbm_dy)**2) * ((A + B)**2)
26
27     R11 = uc**2 * exp_term * (4 * C2u * eta**2 + C1u * common)
28     R22 = uc**2 * exp_term * (4 * C2v * eta**2 + C1v * common)
29     R12 = -Cuv * uc**2 * eta * abs(eta) * exp_term
30
31     k = 0.5 * (R11 + 2 * R22)
32     a11 = (R11 / (2 * k)) - 1/3
33     a22 = (R22 / (2 * k)) - 1/3
34     a33 = a22
35     a12 = R12 / (2 * k)
36
37     II = -0.5 * (a11**2 + 2*a22**2 + 2*a12**2)
38     III = a33 * (a11*a22 - a12**2)
39     return II, III
40
41 # 3) Fronti res th oriques du triangle de Lumley
42 II_th = np.linspace(0, -1/3, 500)
43 III_ext = 2 * (-II_th/3)**1.5
44 II_ctr = -np.linspace(0, 1/12, 500)
45 III_ctr = -2 * (-II_ctr/3)**1.5
46 II_uni = np.linspace(-1/12, -1/3, 500)
47 III_uni = -(9*II_uni + 1)/27
48
49 # 4) Discr tisation r guli re de      dans [0,2]
50 eta_min, eta_max = 0.0, 2.0
51 d_eta = 0.0001
52 eta_vals = np.arange(eta_min, eta_max + d_eta, d_eta)
53
54 # 5) Calcul des invariants pour chaque
55 II_vals, III_vals = [], []
56 for eta in eta_vals:
57     II, III = lumley_invariants_eta(eta)
58     II_vals.append(II)
59     III_vals.append(III)
60 II_arr = np.array(II_vals)
61 III_arr = np.array(III_vals)
62
63 # 6) Trac en pleine chelle
64 plt.figure(figsize=(7,6))
65 plt.plot(III_ext, -II_th, 'b', label='Axe extensible')

```

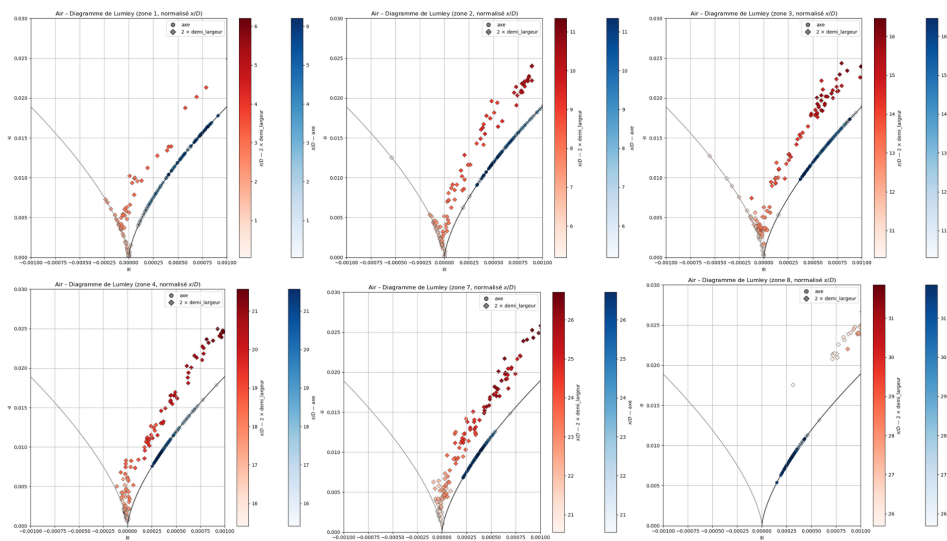
```

66 plt.plot(III_ctr, -II_ctr, 'g', label='Axe contractant')
67 plt.plot(III_uni, -II_uni, color='orange', label='Limite bicomposante')
68 sc = plt.scatter(
69     III_arr, -II_arr,
70     c=eta_vals, cmap='plasma',
71     s=20, edgecolor='none'
72 )
73 cbar = plt.colorbar(sc)
74 cbar.set_label(r'$\eta$ lin aire')
75 plt.xlabel('III')
76 plt.ylabel('-II')
77 plt.title(f'Triangle de Lumley discr tis de {eta_min} {eta_max} (pas = {d_eta})')
78 plt.legend(loc='upper right')
79 plt.grid(True)
80 plt.tight_layout()
81 plt.show()
82
83 # 7) Zoom sur la zone proche du point isotrope (0,0)
84 plt.figure(figsize=(7,6))
85 plt.plot(III_ext, -II_th, 'b', label='Axe extensible')
86 plt.plot(III_ctr, -II_ctr, 'g', label='Axe contractant')
87 plt.plot(III_uni, -II_uni, color='orange', label='Limite bicomposante')
88 sc_zoom = plt.scatter(
89     III_arr, -II_arr,
90     c=eta_vals, cmap='plasma',
91     s=20, edgecolor='none'
92 )
93 cbar_zoom = plt.colorbar(sc_zoom)
94 cbar_zoom.set_label(r'$\eta$')
95 plt.xlabel('III')
96 plt.ylabel('-II')
97 plt.title('JFM zone proche de l isotropie ')
98 plt.xlim(0.000, 0.008)
99 plt.ylim(0.000, 0.060)
100 plt.legend(loc='upper right')
101 plt.grid(True)
102 plt.tight_layout()
103 plt.show()

```

Listing 1 – Script Python : génération du diagramme de Lumley

10.2 Diagramme de Lumley du jet d'air (zones 1, 2, 3, 4, 7 et 8) normalisé en x/D

FIGURE 28 – Diagramme de Lumley du jet d'air (zones 1, 2, 3, 4, 7 et 8) normalisé en x/D

10.3 Démarche théorique de correction chromatique

On souhaite ajuster la puissance d'une lentille lorsque son indice varie avec la longueur d'onde. La démarche se décompose en trois étapes :

1. **Puissance de base à la longueur d'onde de référence**

Pour une lentille de focale f_i et d'indice de référence n_{ref} (p.ex. BK7 à $\lambda_{\text{ref}} = 532 \text{ nm}$), la puissance optique vaut

$$P_{\text{ref}} = \frac{1}{f_i}.$$

2. **Dispersion chromatique**

À une autre longueur d'onde λ , l'indice du verre devient

$$n(\lambda) = \sqrt{1 + \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3 \lambda^2}{\lambda^2 - C_3}},$$

où λ est exprimée en micromètres.

3. **Facteur de correction et formule finale**

La forme géométrique de la lentille (courbure optique $\mathcal{C}$) reste inchangée, d'où le facteur

$$\frac{n(\lambda) - 1}{n_{\text{ref}} - 1}.$$

La puissance chromatique s'écrit alors

$$P_i(\lambda) = \underbrace{\frac{n(\lambda) - 1}{n_{\text{ref}} - 1}}_{\text{facteur de dispersion}} \times \underbrace{\frac{1}{f_i}}_{\text{puissance de base}} = \frac{n(\lambda) - 1}{n_{\text{ref}} - 1} \frac{1}{f_i}.$$

10.4 Code MATLAB — Calcul de la profondeur et de l'épaisseur du jet à l'aide de la loi de Sellmeier

```

1 function lentille_triple_sellmeier
2 % CHAMPS D'ENTREE
3 labels = { ...
4     'Focale L1 f1 [mm]',           , ...
5     'Focale L2 f2 [mm]',           , ...
6     'Focale L3 f3 [mm]',           , ...
7     'Indice n      532 nm',         , ...
8     'Longueur d''onde lambda [nm]', ...
9     'Dist L1-L2 [mm]',             , ...
10    'Dist L1-L3 [mm]',             , ...
11    'Dist L1-Jet [mm]',            , ...
12    'Divergence init. [mrad]',     , ...
13    'Diametre     L1 [mm]',        ...
14 };
15 defaults = { ...
16     '100', '-41', '-60', ...
17     '1.51680', ...
18     '532', '59', '150', '510', '3.0', '6.0' ...
19 };
20
21 hFig = figure('Name', 'Lentilles Triples + n variable', 'NumberTitle', 'off', ...

```

```

22         'MenuBar','none','Units','normalized','Position',[0.1 0.1 0.7
0.8],...
23         'Color','w');
24
25 nr = numel(labels); uie = gobjects(1,nr);
26 posY = linspace(0.88,0.18,nr);
27 for i = 1:nr
28     uicontrol(hFig,'Style','text','Units','normalized',...
29         'Position',[0.05 posY(i) 0.35 0.035],'BackgroundColor',[0.9 0.9
0.9],...
30         'HorizontalAlignment','left','String',labels{i});
31     uie(i) = uicontrol(hFig,'Style','edit','Units','normalized',...
32         'Position',[0.42 posY(i) 0.25 0.035],'BackgroundColor','w',...
33         'String',defaults{i});
34 end
35
36 uicontrol(hFig,'Style','pushbutton','Units','normalized',...
37     'Position',[0.42 0.08 0.25 0.06],'FontSize',12,'String','Calculer'
,...
38     'Callback',@calc_triple);
39
40 hResult = uicontrol(hFig,'Style','listbox','Units','normalized',...
41     'Position',[0.70 0.55 0.25 0.40],'BackgroundColor','w'
,...
42     'FontName','Courier New','FontSize',10);
43
44 function calc_triple(~,~)
45     vs = str2double(get(uie,'String'));
46     if any(isnan(vs(1:3)))
47         errordlg('Les 3 focales doivent tre valides.','Erreur'); return;
48     end
49     vals = num2cell(vs);
50     [f1_mm,f2_mm,f3_mm,n_ref,lambda_nm, ...
51         d12_mm,d13_mm,d1J_mm,BD0_mrad,DM1_mm] = deal(vals{:});
52
53     f1 = f1_mm*1e-3; f2 = f2_mm*1e-3; f3 = f3_mm*1e-3;
54     lambda = lambda_nm*1e-9;
55     d12 = d12_mm*1e-3; d13 = d13_mm*1e-3; d1J = d1J_mm*1e-3;
56     BD0 = BD0_mrad*1e-3; DM1 = DM1_mm*1e-3;
57
58     B1 = 1.03961212; C1 = 0.00600069867;
59     B2 = 0.231792344; C2 = 0.0200179144;
60     B3 = 1.01046945; C3 = 103.560653;
61     lam_um = lambda_nm*1e-3;
62     n_lambda = sqrt(1 + ...
63         B1*lam_um^2/(lam_um^2 - C1) + ...
64         B2*lam_um^2/(lam_um^2 - C2) + ...
65         B3*lam_um^2/(lam_um^2 - C3));
66
67     P1 = (n_lambda - 1)/(n_ref - 1) * (1/f1);
68     P2 = (n_lambda - 1)/(n_ref - 1) * (1/f2);
69     P3 = (n_lambda - 1)/(n_ref - 1) * (1/f3);
70
71     FD0 = -DM1/(2*tan(BD0/2));
72     FD1 = 1/(P1 + 1/FD0);
73     FD2 = 1/(P2 - 1/(d12 - FD1));
74     FD3 = 1/(P3 - 1/((d13 - d12) - FD2));
75

```

```

76     BD1 = 2*atan(DM1/(2*FD1));
77     DM2 = abs(2*tan(BD1/2)*(d12 - FD1));
78     BD2 = 2*atan(DM2/(2*FD2));
79     DM3 = abs(2*tan(BD2/2)*((d13 - d12) - FD2));
80     BD3 = 2*atan(DM3/(2*FD3));
81
82     distG2J = (d1J - d12) - FD2;
83     distG3J = (d1J - d13) - FD3;
84     thickness = abs(2*tan(BD2/2)*distG2J);
85     depth = abs(2*tan(BD3/2)*distG3J);
86
87     txt = { ...
88         sprintf('n( )= %.5f (r fractif)',n_lambda), ...
89         sprintf('P1= %.1f D P2= %.1f D P3= %.1f D',P1,P2,P3), ...
90         sprintf('FD1= %.1f mm FD2= %.1f mm FD3= %.1f mm',FD1*1e3,FD2*1e3,FD3*1e3
91     ), ...
92         ', ...
93         sprintf('Epaisseur @ jet : %.1f mm',thickness*1e3), ...
94         sprintf('Profondeur @ jet : %.1f mm',depth*1e3) ...
95     };
96     set(hResult,'String',txt,'Value',1);
97     drawnow;
98 end
end

```

Listing 2 – Code MATLAB – Fonction lentille_triple_sellmeier

10.5 la méthode de dichotomie pour l'optimisation de notre système

Optimisation pour le vert

```

1  import numpy as np
2
3  # Param tres fixes (en m tres)
4  p1 = 0.100      # focale L1
5  p2 = -0.041     # focale L2
6  p3 = -0.060     # focale cylindrique L3
7  d13 = 0.150     # distance L 1 L3
8  d1J = 0.510     # distance L 1 Jet
9  D01 = 6e-3      # diam tre L1
10 theta0 = 3e-3   # divergence initiale
11
12 def sheet_depth(d12):
13     # 1) Avant L1
14     FD0 = -D01 / (2 * np.tan(theta0 / 2))
15     FD1 = 1 / (1/p1 + 1/FD0)
16     th1 = 2 * np.arctan(D01 / (2 * FD1))
17     # 2) Apr s L2
18     L = d12 - FD1
19     FD2 = 1 / (1/p2 - 1/L)
20     th2 = 2 * np.arctan((L * np.tan(th1 / 2)) / FD2)
21     # 3) Apr s L3
22     M = (d13 - d12) - FD2
23     FD3 = 1 / (1/p3 - 1/M)
24     th3 = 2 * np.arctan((M * np.tan(th2 / 2)) / FD3)
25     # 4) Au plan du jet

```

```

26     Q = (d1J - d13) - FD3
27     return abs(2 * Q * np.tan(th3 / 2)) # en m tres
28
29 # Fonction f(d12) = DM4h(d12) - 1 mm
30 f = lambda x: sheet_depth(x) - 1e-3
31
32 # Choix de l'intervalle de d part [a, b]
33 a, b = 0.0735, 0.0738
34
35 # V rification rapide du signe
36 assert f(a) * f(b) < 0, "Les signes de f(a) et f(b) doivent tre oppos s !"
37
38 # Bissection
39 tol = 1e-6 # tol rance sur d12 (1 m )
40 while (b - a) / 2 > tol:
41     c = (a + b) / 2
42     if f(a) * f(c) <= 0:
43         b = c
44     else:
45         a = c
46
47 d12_opt = (a + b) / 2
48 print(f"Distance optimale L 1 L2 = {d12_opt*1e3:.1f} mm")

```

Deuxième code : Optimisation pour l'UV

```

1 import numpy as np
2
3 # Param tres fixes (en m tres et unit s correspondantes)
4 f1 = 100e-3 # focale L1 [m]
5 f2 = -41e-3 # focale L2 [m]
6 f3 = -60e-3 # focale L3 [m]
7 n_ref = 1.45850 # indice de r f rence 532 nm
8 lambda_nm = 266 # longueur d'onde [nm]
9 d13 = 150e-3 # distance L 1 L3 [m]
10 d1J = 510e-3 # distance L 1 Jet [m]
11 BD0 = 3e-3 # divergence initiale [rad]
12 DM1 = 6e-3 # diam tre L1 [m]
13
14 # Coefficients Sellmeier pour BK7
15 B1, C1 = 0.6961663, (0.0684043)**2
16 B2, C2 = 0.4079426, (0.1162414)**2
17 B3, C3 = 0.8974794, (9.896161)**2
18
19 # Calcul de n(lambda) via Sellmeier (lambda en m )
20 lam_um = lambda_nm * 1e-3
21 n_lambda = np.sqrt(1 +
22     B1 * lam_um**2 / (lam_um**2 - C1) +
23     B2 * lam_um**2 / (lam_um**2 - C2) +
24     B3 * lam_um**2 / (lam_um**2 - C3))
25
26 # Puissances optiques corrig es
27 P1 = (n_lambda - 1) / (n_ref - 1) * (1 / f1)
28 P2 = (n_lambda - 1) / (n_ref - 1) * (1 / f2)
29 P3 = (n_lambda - 1) / (n_ref - 1) * (1 / f3)
30

```

```

31 def sheet_depth(d12):
32     # Origine virtuelle avant L1
33     FD0 = -DM1 / (2 * np.tan(BD0 / 2))
34     # Foyers en cascade
35     FD1 = 1 / (P1 + 1 / FD0)
36     FD2 = 1 / (P2 - 1 / (d12 - FD1))
37     FD3 = 1 / (P3 - 1 / ((d13 - d12) - FD2))
38     # Divergences et diam tres
39     BD1 = 2 * np.arctan(DM1 / (2 * FD1))
40     DM2 = abs(2 * np.tan(BD1 / 2) * (d12 - FD1))
41     BD2 = 2 * np.arctan(DM2 / (2 * FD2))
42     DM3 = abs(2 * np.tan(BD2 / 2) * ((d13 - d12) - FD2))
43     BD3 = 2 * np.arctan(DM3 / (2 * FD3))
44     # Profondeur au jet
45     distG3J = (d1J - d13) - FD3
46     return abs(2 * np.tan(BD3 / 2) * distG3J) # en m tres
47
48 # Fonction annuler : sheet_depth(d12) - 1mm
49 f = lambda x: sheet_depth(x) - 1e-3
50
51 # Recherche automatique de l'intervalle [a, b]
52 d_vals = np.linspace(0.01, 0.9, 500) # balayage de 10 mm 200 mm
53 f_vals = np.array([f(d) for d in d_vals])
54
55 # Detection du premier changement de signe
56 idx = np.where(np.sign(f_vals[:-1]) * np.sign(f_vals[1:]) < 0)[0]
57 if len(idx) == 0:
58     raise ValueError("Aucun changement de signe detecté sur l'intervalle test")
59 a, b = d_vals[idx[0]], d_vals[idx[0] + 1]
60
61 # Methode de bisection
62 tol = 1e-6 # tolerance 1 m
63 while (b - a) / 2 > tol:
64     c = (a + b) / 2
65     if f(a) * f(c) <= 0:
66         b = c
67     else:
68         a = c
69
70 d12_opt = (a + b) / 2
71 print(f"Intervalle initial : [{a*1e3:.1f} mm, {b*1e3:.1f} mm]")
72 print(f"Distance optimale L1 L2 = {d12_opt*1e3:.2f} mm")

```

10.6 Démonstration de la conservation du moment

- un jet libre : un fluide est éjecté à grande vitesse à partir d'une buse dans un milieu environnant au repos (qui a été négligé),
- une décroissance de la vitesse maximale V_c ,
- un élargissement de la largeur du jet b_m , qui est une mesure de l'intensité radiale du jet.

10.6.1 Conservation du moment axial

$$M = \int_0^\infty \rho v^2 2\pi r dr$$

Dans la zone de l'auto-similarité, M se conserve car il n'y a pas de force externe (cela signifie que M ne change pas avec y).

Zone d'auto-similarité : $y \gg d$ (de distance de la buse)

On suppose que la vitesse axiale suit une loi gaussienne :

$$V(r) = V_c \exp \left[- \left(\frac{r}{b_m} \right)^2 \right], \quad b_m = \frac{L_u}{\sqrt{2}}$$

$$M = \int_0^\infty \rho v^2 2\pi r dr$$

On effectue le changement de variable :

$$\eta = \frac{r}{b_m}, \quad dr = b_m d\eta$$

Ainsi :

$$M = \int_0^\infty \rho (V_c \exp[-\eta^2])^2 2\pi(b_m \eta) b_m d\eta$$

$$M = 2\pi\rho V_c^2 b_m^2 \int_0^\infty \exp(-2\eta^2) \eta d\eta$$

L'intégrale est :

$$\int_0^\infty \exp(-2\eta^2) \eta d\eta = \frac{1}{4}$$

Donc :

$$M = 2\pi\rho V_c^2 b_m^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}\rho V_c^2 b_m^2$$

En remplaçant $b_m = \frac{L_u}{\sqrt{2}}$:

$$M = \frac{\pi}{2}\rho V_c^2 \left(\frac{L_u}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$M = \frac{\pi}{4}\rho V_c^2 L_u^2$$

10.6.2 Conséquence de la conservation du moment

Puisque M est constant :

$$V_c^2 L_u^2 = \text{cste} \quad \Rightarrow \quad V_c L_u = \text{cste}$$